ACCESO UNIVERSIDAD

MATEMATICAS. I

cuestiones y ejercicios resueltos

J. Aymerich Miralles   J. García García   R. Pérez Fuentes

MATEMÁTICAS. I

Grupos de Ciencias

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS. I

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

J. AYMERICH MIRALLES
Catedrático

J. GARCÍA GARCÍA
Catedrático

R. PÉREZ FUENTES
Profesor Agregado

EDITORIAL MARFIL, S. A.
ALCOY 1990

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

I.S.B.N.: 84-268-0635-X

Depósito Legal: A - 1059 - 1990

Edita: EDITORIAL MARFIL, S. A.
San Eloy, 17
03800-ALCOY

Fotocomposición: COMPOBELL, S. A.
Salón de Ruiz Hidalgo, 9
30002-MURCIA

Imprime: Artes Gráficas Alcoy, S. A.
San Eloy, 17
03800-ALCOY

PRESENTACIÓN

El presente libro recoge una elegida selección de problemas y cuestiones de Matemáticas propuestos todos ellos en las Pruebas de Acceso a la Universidad, en diferentes Distritos Universitarios, pues parece echarse en falta una publicación de estas características, para orientar, fundamentalmente, a los alumnos de Matemáticas, que deben superar dichas pruebas para acceder a estudios superiores; a la vez, que una colección de problemas resueltos detalladamente correspondientes al temario de Matemáticas vigente en el Curso de Orientación Universitaria, siempre les permitirá un mayor seguimiento y comprensión del mismo.

Se han clasificado los problemas en seis capítulos:

I. Sistemas de ecuaciones lineales.
II. Espacio afín y euclídeo tridimensional.
III. Cálculo diferencial.
IV. Cálculo integral. Integral indefinida.
V. Cálculo integral. Integral definida. Aplicaciones.
VI. Cálculo de probabilidades.

El capítulo III se acompaña de una guía para representar gráficamente una función explícita $y = f(x)$. Los capítulos IV y V se inician con unos resúmenes teóricos que recogen las técnicas de cálculo de primitivas de una función, y las fórmulas más usuales para resolver los ejercicios de aplicación de la integral definida.

En los enunciados de las cuestiones y ejercicios se han respetado los originales y la notación de los mismos.

El esfuerzo que ha supuesto la realización de esta obra quedaría recompensado si alcanza los objetivos de ayuda y orientación que motivaron a los autores a escribirla.

Valencia, abril 1989
LOS AUTORES

ÍNDICE

Capítulo 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

CUESTIONES

CUESTION 1.1. Enunciar y justificar una condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\}$$

tal que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, no admita ninguna solución.

SOLUCION. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

las matrices de coeficientes y la matriz ampliada.

El teorema de Rouché asegura que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que $\text{Rango}\, A = \text{Rango}\, M$.

La condición $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ asegura que Rango A es al menos dos. Si Rango $A = 3$, entonces Rango $M = 3$ y el sistema es compatible (determinado). Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea incompatible es:

$$\text{Rango}\, A = 2 \quad y \quad \text{Rango}\, M = 3, \quad \text{es decir,} \quad |A| = 0 \quad y \quad \text{Rango}\, M = 3$$

CUESTION 1.2. Justificar cuándo un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas admite soluciones distintas de la trivial.

SOLUCION. Sabemos que en los sistemas homogéneos el rango de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales, y además, si dicho rango es igual al número de incógnitas el sistema sólo tiene la solución trivial. Por consiguiente, para que un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas tenga soluciones distintas de la solución trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero.

CUESTIÓN 1.3. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{de forma que} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostrar que tiene solución única y calcularla.

SOLUCION. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes y las matrices columna de incógnitas y términos independientes del sistema.

La forma matricial del sistema es $AX = B$, y resolverlo equivale a encontrar una matriz X que cumpla dicha ecuación matricial.

Puesto que $|A| \neq 0$, la matriz A admite inversa, A^{-1}. Multiplicando por la izquierda los dos miembros de la ecuación $AX = B$, por la inversa de A, se obtiene:

$$X = A^{-1}B$$

lo que demuestra que el sistema tiene solución única. Calculemos la solución. Tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} $(i,j = 1, 2, 3)$ es el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A.

Efectuando el producto del segundo miembro e igualando las matrices, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

CUESTION 1.4. Estudiar las condiciones que deben cumplirse para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

tenga solución distinta de la $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

SOLUCION. La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas.

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La condición es $\text{Rango}\, A < n$.

* Si $m < n$, siempre $\text{Rango}\, A < n$.
* Si $m = n$, la condición equivale a $|A| = 0$.

CUESTION 1.5. Caracterizar cuándo un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas admite solución distinta de la trivial. La solución trivial es $x = y = z = 0$.

SOLUCION. Resuelta en la cuestión 1.2.

CUESTIÓN 1.6. Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\}$$

hallar la relación que debe existir entre los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes para que el sistema sea:

a) **Compatible y determinado.**
b) **Compatible e indeterminado.**
c) **Incompatible.**

SOLUCION. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema.

a) La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible y determinado es que $\text{Rango}\, A = \text{Rango}\, M = 2$. La condición equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

b) Para que el sistema sea compatible e indeterminado, debe ser:

$$\text{Rango}\, A = \text{Rango}\, M < 2$$

Luego los coeficientes de las ecuaciones han de ser proporcionales. La condición pedida es:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

c) Para que el sistema sea incompatible, debe ser $\text{Rango}\, A = 1$, $\text{Rango}\, M = 2$, lo que equivale a:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

CUESTION 1.7. Indicar cuál de las afirmaciones 1, 2, 3 ó 4 es correcta, razonando la respuesta. El sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\}$$

tiene solución única si y sólo si:

1) $\text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$

2) $\text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} = 3$

3) $\text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

SOLUCION. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tenga solución única, es que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

De las condiciones dadas es correcta la tercera, pues:

$$\text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

La condición 1) garantiza la compatibilidad del sistema, pero no la unicidad de la solución.

Las condiciones 2) y 4) no garantizan ni siquiera la compatibilidad.

CUESTIÓN 1.8. Demostrar que un sistema de ecuaciones lineales es compatible si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

SOLUCION. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\}$$

es compatible si y sólo si existen valores de las incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, de modo que se cumple la igualdad matricial:

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Es decir, si y sólo si la columna de términos independientes del sistema es combinación lineal de las columnas de coeficientes de las incógnitas, lo cual equivale a que las matrices de coeficientes y ampliada tengan igual rango.

CUESTIÓN 1.9. Deducir la regla de Cramer en un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. ¿Se podría haber deducido para 4 ecuaciones y 5 incógnitas? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. Consideremos el sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{aligned}\right\}$$

donde el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Dicho sistema se puede expresar abreviadamente, en forma matricial $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes y X y B son las matrices columna:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Por ser A una matriz regular, existe la matriz inversa A^{-1}. Multiplicando por A^{-1} a la izquierda la igualdad $AX = B$, se obtiene: $X = A^{-1}B$. Por tanto, el sistema considerado tiene solución única (compatible determinado), y la solución es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

de donde resulta:

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + A_{41}b_4}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{|A|}$$

y análogamente:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{|A|}$$

fórmulas conocidas con el nombre de REGLA DE CRAMER, que nos permite resolver sistemas de igual número de ecuaciones que incógnitas, cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. En dichos sistemas el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante de la matriz A de coeficientes, el determinante de la matriz que resulta de sustituir en A la columna de coeficientes de dicha incógnita por la de términos independientes.

La regla de Cramer no es aplicable a un sistema de 4 ecuaciones y 5 incógnitas. En este caso es:

Rango $A < 5$ (número de incógnitas), y el sistema es compatible indeterminado o incompatible.

CUESTION 1.10. Enunciar y demostrar la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

SOLUCION. Resuelta en cuestión 1.3.

CUESTION 1.11. Justificar que el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

admite infinitas soluciones si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Calcular las infinitas soluciones sabiendo que $a_{11} \neq 0$.

SOLUCION. El sistema homogéneo dado admite infinitas soluciones si, y sólo si.

el rango de la matriz de coeficientes es menor que dos (número de incógnitas), lo que equivale a:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Si $a_{11} \neq 0$, el sistema equivale al $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$.

Despejando x_1 obtenemos $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2$, luego el conjunto de soluciones es:

$$\left\{\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2, x_2\right); x_2 \in R\right\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\lambda \\ x_2 = \lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica. Las ecuaciones del sistema dado representan dos rectas coincidentes. Las coordenadas de sus infinitos puntos son las soluciones del sistema.

CUESTION 1.12. El sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{aligned}\right\}$$

verifica $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$. **Discutir cuando admite solución.**

SOLUCION. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema.

La condición dada asegura que Rango $M \leqslant 2$, luego tenemos:

* Si Rango $A = 2$, entonces Rango $M = 2$. Compatible determinado.
* Si Rango $A = 1$ y Rango $M = 2$. Incompatible.
* Si Rango $A = 1$ y Rango $M = 1$. Compatible indeterminado.

CUESTION 1.13. Enunciar y demostrar la regla de Cramer para el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \quad \text{donde} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

SOLUCION. El sistema dado es un sistema de Cramer y, tal como se demostró en la cuestión 1.3, tiene solución única, siendo el valor de cada incógnita el resultado de dividir por el determinante de la matriz A de coeficientes, el determinante de la matriz obtenida al sustituir en la matriz A la columna de coeficientes de dicha incógnita por la de términos independientes.

CUESTION 1.4. Justificar, aplicando el teorema de Rouche-Frobenius, cuándo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z = b_4 \end{array}\right\}$$

tiene solamente una solución.

SOLUCION. Según el teorema de Rouche-Frobenius, para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución única (compatible determinado), el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada han de ser igual al número de incógnitas. La condición entonces para que el sistema dado tenga sólo una solución es que el rango de su matriz de coeficientes y ampliada sea tres, lo que equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 3$$

CUESTION 1.15. Enunciado de la regla de Cramer. ¿Puede aplicarse la regla al sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y \quad\; = 5 \end{array}\right\}?$$

¿Obtendrías todas las soluciones del sistema anterior aplicando la regla de Cramer al sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 - z \\ x + 2y &= 3 + z \end{aligned}\right\}$$

considerando z como un parámetro? Justifica las respuestas.

SOLUCION. El enunciado de la regla de Cramer es conocido, y sabemos que la regla se aplica para calcular la solución única de los sistemas lineales de n ecuaciones y n incógnitas, en los que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo. En el sistema dado, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, por consiguiente, la matriz de coeficientes no es regular y no puede aplicarse la regla.

Suprimiendo del sistema dado la tercera ecuación se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 - z \\ x + 2y &= 3 + z \end{aligned}\right\}$$

el cual, para cada valor de z, es un sistema de Cramer con dos incógnitas x e y, que resuelto por la regla de Cramer se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - z & 1 \\ 3 + z & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 - 3z \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - z \\ 1 & 3 + z \end{vmatrix}}{|A|} = 1 + 2z$$

Las infinitas soluciones del sistema son entonces los elementos del conjunto

$$S = \{(1 - 3z, 1 + 2z, z) \quad ; \quad z \in \mathbb{R}\}$$

CUESTION 1.16. Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius y aplícalo a los sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

indicando si son compatibles, determinados o indeterminados, o incompatibles, NO RESOLVIENDO NINGUNO EN NINGUN CASO.

SOLUCION. Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, el teorema de Rouché-Frobenius dice que el sistema es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

Si A es la matriz de coeficientes y M la matriz de coeficientes ampliada con la columna de términos independientes, se tiene:

* Si Rango A = Rango M = n (número de incógnitas). COMPATIBLE DETERMINADO.
* Si Rango A = Rango M < n. COMPATIBLE INDETERMINADO.
* Si Rango A $\neq$ Rango M. INCOMPATIBLE.

En los sistemas dados es:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{matrix}\right\} \text{Rango A} = 1 \neq \text{Rango M} = 2. \text{ Incompatible}$$

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{matrix}\right\} \text{Rango A} = \text{Rango M} = 2. \text{ Compatible indeterminado}$$

En los sistemas homogéneos siempre Rango A = Rango M. La aplicación del teorema de Rouché-Frobenius queda entonces:

* Si Rango A = n (número de incógnitas). Determinado (solución trivial).
* Si Rango A < n. Indeterminado (infinitas soluciones).

Puesto que en el tercer sistema es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Rango A = 3, y el sistema sólo tiene solución trivial $x = y = z = 0$.

CUESTION 1.17. Justifica que el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones y explica cómo se obtendrían. Aplicación: Si el sistema anterior admite las soluciones (3, 2, 4) y (2, 3, 0), ¿cuánto valdrán los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}?$$

SOLUCION. El sistema dado es un sistema homogéneo de menor número de ecuaciones que incógnitas. El rango de la matriz de coeficientes es, por tanto, menor que el número de incógnitas, y según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si Rango A = 1, el sistema equivale a una sola ecuación, digamos la $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$. El conjunto de las infinitas soluciones es entonces:

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3\right\}$$

(hemos supuesto que $a_{11} \neq 0$). Es decir, las infinitas soluciones se obtienen dando valores a los parámetros α y β en

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\alpha - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

Si Rango A = 2, y digamos que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, las incógnitas x_1 y x_2 son principales. Pasando la incógnita x_3 al segundo miembro el sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= -a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= -a_{23}x_3 \end{aligned}\right\}$$

que resuelto por la regla de Cramer se obtiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = px_3, \quad \text{donde} \quad p = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{21} & -a_{23}x_3 \end{vmatrix}}{|A|} = qx_3, \quad \text{donde} \quad q = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Las infinitas soluciones son las ternas (px_3, qx_3, x_3), donde x_3 toma todos los valores reales; por consiguiente, son todas proporcionales.

Si las ternas $(3, 2, 4)$ y $(2, 3, 0)$ son soluciones del sistema, puesto que no son proporcionales, debe ser Rango A = 1, lo que implica que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Interpretación geométrica: Según que el rango de A sea 1 ó 2, las ecuaciones del sistema representan un plano o una recta, que pasan ambos por el origen de coordenadas. En el segundo caso, las soluciones son las componentes de los vectores de posición de cada uno de los puntos de la recta, esto es, las componentes de los vectores directores de la recta, luego son todas proporcionales.

Puesto que los puntos de coordenadas $(3, 2, 4)$ y $(2, 3, 0)$ no están alineados con el origen, el conjunto de soluciones son las coordenadas de los puntos de un plano y, como hemos dicho, esto es en el caso en que $\text{Rango}\, A = 1$, y los determinantes dados son entonces nulos.

CUESTION 1.18. Obtener la condición para que la suma de dos soluciones de un sistema lineal de ecuaciones sea también solución del mismo. ¿Es condición necesaria y suficiente?

SOLUCION. Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

la matriz columna de términos independientes.

Las soluciones del sistema (1) están definidas por las matrices

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tales que satisfacen la igualdad matricial:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

Si

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad y \quad P + Q = \begin{bmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \\ \vdots \\ p_n + q_n \end{bmatrix}$$

son soluciones del sistema (1), tendremos que satisfacen la igualdad (2), luego:

$$\begin{aligned} A \cdot P &= B \\ A \cdot Q &= B \\ A \cdot (P + Q) &= B \end{aligned}$$

de donde $2B = B$, luego debe ser $B = 0$, esto es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La condición necesaria, entonces, para que la suma de dos soluciones de un sistema de ecuaciones lineales sea también solución, es que dicho sistema sea homogéneo.

La condición es también suficiente, puesto que, recíprocamente, si $B = 0$ y P y Q son soluciones de (2), es $A \cdot P = A \cdot Q = 0$, luego $A(P + Q) = AP + AQ = 0$, lo que prueba que $P + Q$ es también solución.

CUESTION 1.19. Sea S un sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, que es compatible y cuya matriz asociada tiene rango 2. Explicar, razonando la respuesta, cómo calcular el conjunto de soluciones de S, en cada uno de los casos siguientes: 1) si S tiene 3 ecuaciones; 2) si S tiene 2 ecuaciones.

SOLUCION. Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada asociadas al sistema de ecuaciones S.

Del enunciado se tiene que $\text{Rango}\, A = \text{Rango}\, M = 2$, ya que el sistema es compatible.

1) Si S tiene 3 ecuaciones

Seleccionamos un menor principal de orden dos de A, que define dos ecuaciones principales y dos incógnitas principales en el sistema S. Se suprime la ecuación no principal, se pasa al segundo miembro la incógnita no principal, y se resuelve el sistema en términos de ésta.

Ejemplo:

$$S \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 2z = 1 \\ 3x + 8y \quad\quad = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \;;\; M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Rango A = Rango M = 2, y por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, es un menor principal de A. Este menor define las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas como principales. Suprimida la tercera ecuación, y pasando la incógnita z al segundo miembro, se obtiene el sistema equivalente:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 - z \\ -x + 2y = 1 + 2z \end{array} \right\}$$

Despejando x e y en función de z obtenemos:

$$x = \frac{7 - 8z}{7} \;;\; y = \frac{7 + 3z}{7}$$

El conjunto de soluciones del sistema S es entonces:

$$S = \left\{ \left(\frac{7 - 8z}{7}, \frac{7 + 3z}{7}, z \right) \;;\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Si S tiene dos ecuaciones.

Las dos ecuaciones de S son independientes. Pasamos la incógnita no principal al segundo miembro, y se resuelve el sistema en términos de ésta.

Ejemplo:

$$S \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 - z \\ -x + 2y = 1 + 2z \end{cases}$$

y despejamos x e y en función de z, obteniendo el conjunto de soluciones.

EJERCICIOS

EJERCICIO 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 3y - z &= 2 \\ 3x - 5y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

discutir el sistema en función de los valores de a, resolviéndolo cuando sea posible.

SOLUCION. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & a \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes.

$|A| = 0$ y, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, luego Rango A = 2.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & a \end{vmatrix} = 7(a + 2)$. Por tanto, tenemos:

- Si $a \neq -2$, Rango A = 2 y Rango M = 3, el sistema es incompatible.
- Si $a = -2$, Rango A = Rango M = 2, y el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado). Resolvámoslo en este caso.

Si consideramos el menor principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, define las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas como principales. El sistema es equivalente al:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -z \\ x + 3y &= 2 + z \end{aligned}\right\}$$

Hallando x e y en función de z se obtiene:

$$x = \frac{2 - 2z}{7}, \quad y = \frac{4 + 3z}{7}$$

El conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{\left(\frac{2 - 2z}{7}, \frac{4 + 3z}{7}, z\right); z \in R\right\} \subseteq R^3$$

que también podemos escribir (poniendo $z = 7\lambda$ para evitar denominadores):

$$S \equiv \begin{cases} x = \dfrac{2}{7} - 2\lambda \\ y = \dfrac{4}{7} + 3\lambda \ (\lambda \in R) \\ z = 7\lambda \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas del conjunto de soluciones.

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado representan tres planos. Si $a \neq -2$, los tres planos no tienen puntos comunes. Si $a = -2$, los tres planos pasan por una recta, cuyas ecuaciones paramétricas son las escritas anteriormente, y las coordenadas $\left(\dfrac{2-2z}{7}, \dfrac{4+3z}{7}, z\right)$ de sus infinitos puntos son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de k:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 5x - 5y + 9z &= k \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & k \end{bmatrix}$$

Puesto que es $|A| = 0$, el Rango $A = 2$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, orlando este menor, obtenemos que el Rango de M es 2 ó 3, según que sea cero o distinto de cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & k \end{vmatrix} = 5(5 - k)$$

Por tanto:

* Si $k = 5$, Rango A = Rango $M = 2$, y el sistema es compatible indeterminado.
* Si $k \neq 5$, Rango $A = 2$ y Rango $M = 3$, y el sistema es incompatible.

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema representan tres planos. Si $k = 5$, los tres planos pasan por una recta. Si $k \neq 5$, los planos no tienen puntos comunes.

EJERCICIO 1.3. Discutir y resolver, según los valores de a, el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x + ay + z = a + 2} \\ \mathbf{x + y + az = -2(a + 1)} \\ \mathbf{ax + y + z = a} \end{array}\right\}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$|A| = (1 - a)^2(a + 2)$, luego $|A| = 0$ para $a = 1$ y $a = -2$. Por tanto:

* Si a es distinto de 1 y de -2, $\text{Rango}\, A = \text{Rango}\, M = 3$, y el sistema tiene solución única (compatible determinado). Aplicando la regla de Cramer obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & a & 1 \\ -2(a+1) & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)a(a+2)}{(1-a)^2(a+2)} = \frac{a}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+2 & 1 \\ 1 & -2(a+1) & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)(a+2)^2}{(1-a)^2(a+2)} = \frac{a+2}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a+2 \\ 1 & 1 & -2(a+1) \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(1-a)(1+a)(a+2)}{(1-a)^2(a+2)} = \frac{2(1+a)}{1-a}$$

* Si $a = 1$, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, $\text{Rango}\, A = 1$, $\text{Rango}\, M = 2$ y el sistema es incompatible.

* Si $a = -2$, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rango $A = 2$, y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, Rango $M = 2$ y el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado).

Si consideramos el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, define las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas como principales. El sistema equivale al:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -z \\ x + y &= 2 + 2z \end{aligned}\right\}$$

Hallando x e y en función de z se obtiene:

$$x = \frac{4}{3} + z, \quad y = \frac{2}{3} + z$$

El conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{\left(\frac{4}{3} + z, \frac{2}{3} + z, z\right); z \in R\right\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S \equiv \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} + \lambda \\ y = \dfrac{2}{3} + \lambda \ (\lambda \in R) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica:

* Si a es distinto de 1 y de -2, los tres planos representados por las ecuaciones del sistema se cortan en el punto $\left(\dfrac{a}{a-1}, \dfrac{a+2}{a-1}, \dfrac{2(1+a)}{1-a}\right)$.
* Si $a = 1$, los tres planos no tienen puntos comunes.

* Si $a = -2$, los planos pasan por la recta de ecuaciones cartesianas $\left.\begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{matrix}\right\}$, y las coordenadas $\left(\frac{4}{3} + \lambda, \frac{2}{3} + \lambda, \lambda\right)$, $\lambda \in R$, de sus infinitos puntos son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.4. Discutir según los valores de a, y en cada caso resolver, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ (2 - a)x + y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. El sistema es homogéneo de igual número de ecuaciones que incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que tenga soluciones distintas de la trivial es que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 - a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, y su determinante $|A| = 4(1 - a)$. Por tanto, será:

* Si a es distinto de 1, el sistema sólo tiene solución trivial.
* Si $a = 1$, el sistema equivale al:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Pasando z al segundo miembro y calculando x e y en función de z, obtenemos $x = 2z$, $y = -3z$. El conjunto de soluciones es entonces:

$$S = \{(2z, -3z, z);\ z \in R\}$$

que definido por ecuaciones paramétricas es

$$S \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \quad (\lambda \in R) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado representan tres planos que pasen por el origen de coordenadas. Si $a \neq 1$, los tres planos sólo tienen el origen como punto común. Si $a = 1$, los tres planos pasan por una recta, y las coordenadas de sus infinitos puntos son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.5. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 6x + 3y + 4z &= 0 \\ mx - 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

para los valores de m tales que admita soluciones distintas de la $x = y = z = 0$.

SOLUCION. El sistema homogéneo dado tendrá soluciones distintas de la trivial para los valores del parámetro m que hacen nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ m & -3 & -1 \end{vmatrix} = m - 3$$

Por consiguiente, se pide resolver el sistema obtenido para $m = 3$. Como es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. Suprimiendo la tercera ecuación, y pasando al segundo miembro la incógnita z, se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -z \\ 6x + 3y &= -4z \end{aligned}\right\}$$

Calculados x e y en función de z, resulta:

$$x = -\frac{z}{3}, \quad y = -\frac{2z}{3}$$

El conjunto de soluciones es entonces:

$$S = \left\{\left(-\frac{z}{3}, -\frac{2z}{3}, z\right); z \in R\right\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -2\lambda \ (\lambda \in R) \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

donde hemos hecho $z = 3\lambda$ para evitar denominadores.

Interpretación geométrica: El ejercicio pide para qué valor (valores) del parámetro m, los tres planos representados por las ecuaciones del sistema tienen infinitos puntos comunes. Resulta que esto sucede cuando $m = 3$ y, en este caso, los tres planos pasan por la recta $r \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 6x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$.

EJERCICIO 1.6. Discutir y resolver según los valores de k el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z &= -4 \\ 2x + y + z &= 6 \\ 4x - 5y - z &= k \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, cuyo determinante es cero. Como es $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el Rango $A = 2$.

Por el teorema de Rouché, la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución (compatible), es que las matrices de coeficientes y ampliada tengan igual rango. Por tanto, tenemos que averiguar para qué valores del parámetro k, el rango de la matriz ampliada es dos.

La matriz ampliada es $M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & -1 & k \end{bmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & k \end{vmatrix} = 7(k + 2)$, por tanto, tendremos:

* Si $k \neq -2$, Rango $A = 2$ y Rango $M = 3$. Sistema incompatible.
* Si $k = -2$, Rango A = Rango $M = 2 < 3$ (número de incógnitas), y el sistema es compatible indeterminado.

  Tomando el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas son principales, y el sistema equivale al:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= z - 4 \\ 2x + y &= -z + 6 \end{aligned}\right\}$$

  Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando a la primera se tiene $7x = -2z + 14$, luego

$$x = -\frac{2z}{7} + 2, \quad y = -\frac{3z}{7} + 2$$

  El conjunto de soluciones es:

$$S = \left\{ \left(2 - \frac{2z}{7},\ 2 - \frac{3z}{7},\ z \right);\ z \in R \right\} \subseteq R^3$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \quad (\lambda \in R) \\ z = 7\lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado representan tres planos. Si $k \neq -2$, los planos no tienen puntos en común. Si $k = -2$, los tres planos pasan por una recta, cuyas ecuaciones paramétricas son las escritas anteriormente, y las coordenadas $(2 - 2\lambda, 2 - 3\lambda, 7\lambda)$ de sus infinitos puntos son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.7. Discutir y resolver en función de k el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z &= -4 \\ 2x + y + kz &= 6 \\ 7x - 7y - z &= k \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & k \\ 7 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 7 & -7 & -1 & k \end{bmatrix}$$

Calculando el determinante de A, se obtiene: $|A| = 14(1 - k)$. Por tanto:

* Si $k \neq 1$, Rango A = Rango M = 3 (número de incógnitas), y el sistema es compatible determinado. Aplicando la regla de Cramer para obtener la solución única del sistema, resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 6 & 1 & k \\ k & -7 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3k^2 - 27k + 28}{14(1 - k)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 6 & k \\ 7 & k & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^2 - 30k + 28}{14(1 - k)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & -7 & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7k}{14(1 - k)} = \frac{k}{2(1 - k)}$$

* Si k = 1, en este caso es Rango A = 2 y $M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 7 & -7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Puesto que es $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & -7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el Rango M = 3, y el sistema es incompatible.

Interpretación geométrica: Los planos representados por las ecuaciones del sistema tienen en común el punto $\left(\dfrac{-3k^2 - 27k + 28}{14(1-k)}, \dfrac{-k^2 - 30k + 28}{14(1-k)}, \dfrac{2}{2(1-k)}\right)$, cuando $k \neq 1$, y no tienen puntos comunes en el caso en que k = 1.

EJERCICIO 1.8. Discutir según los valores de a y b el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 3 \\ 4x + az &= b \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

El determinante de A es: $|A| = 2(4 - a)$, que es cero para a = 4. Por tanto:

* Si $a \neq 4$, Rango A = 3, y cualquiera que sea b es Rango M = 3. El sistema es entonces compatible determinado.
* Si a = 4, Rango A = 2 y la matriz ampliada es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & b \end{bmatrix}.$$

Puesto que es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & b \end{vmatrix} = 8(2 - b)$, se tiene:

— Si $b \neq 2$, Rango A $\neq$ Rango M = 3. Sistema incompatible.
— Si b = 2, Rango A = Rango M = 2. Sistema compatible indeterminado.

Interpretación geométrica: Los tres planos representados por las ecuaciones del sistema, tienen entre sí la siguiente posición relativa:

* Si $a \neq 4$, cualquiera que sea b, los planos se cortan en un punto.

* Si $a = 4$ y $b \neq 2$, los planos no tienen puntos comunes.
* Si $a = 4$ y $b = 2$, los tres planos pasan por una recta de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 1.9. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función de m, resolviéndolo cuando sea posible:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x - y - 5z &= 7 \\ 3x - 4y + mz &= m \\ 6x - 3y - 15z &= 21 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCION. La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & -4 & m \\ 6 & -3 & -15 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \\ 3 & -4 & m & m \\ 6 & -3 & -15 & 21 \end{bmatrix}$$

En una situación como ésta, lo aconsejable es empezar calculando el determinante de M, puesto que Rango A es a lo sumo tres y, por consiguiente, para los valores del parámetro para los que sea $|M| \neq 0$, el sistema es incompatible. La discusión se termina estudiando los sistemas obtenidos para los valores del parámetro que hacen $|M| = 0$.

En el ejercicio concreto que nos ocupa, es obvio que $|M| = 0$ cualquiera que sea m, puesto que la segunda y cuarta fila de la matriz M son proporcionales.

Suprimiendo la cuarta ecuación, obtenemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x - y - 5z &= 7 \\ 3x - 4y + mz &= m \end{aligned}\right\}$$

para el cual es $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & -4 & m \end{bmatrix}$ la matriz de coeficientes.

Resulta $|A^*| = -5(m + 13)$, luego tenemos:

* Si $m \neq -13$, Rango $A^* = 3$ y, por consiguiente, también es 3 el rango de la matriz ampliada. El sistema es compatible determinado. Aplicando la regla de Cramer para obtener la solución, obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \\ m & -4 & m \end{vmatrix}}{|A^*|} = \frac{-(22m + 104)}{-5(m + 13)} = \frac{22m + 104}{5(m + 13)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \\ 3 & m & m \end{vmatrix}}{|A^*|} = \frac{16m - 78}{-5(m + 13)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -4 & m \end{vmatrix}}{|A^*|} = \frac{-5(m - 13)}{-5(m + 13)} = \frac{m - 13}{m + 13}$$

* Si $m = -13$, Rango $A^* = 2$ y la matriz ampliada es

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \\ 3 & -4 & -13 & -13 \end{bmatrix}. \text{ Puesto que } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -4 & -13 \end{vmatrix} \neq 0,$$

el Rango $M^* = 3$, y el sistema es en este caso incompatible.

Interpretación geométrica: Entre los planos cuyas ecuaciones son las del sistema dado, hay dos que son el mismo. El problema entonces se reduce al estudio de la posición relativa de tres planos, resultando:

* Si $m \neq -13$, los tres planos se cortan en el punto de coordenadas:

$$\left(\frac{22m + 104}{5(m + 13)}, \frac{16m - 78}{-5(m + 13)}, \frac{m - 13}{m + 13}\right)$$

* Si $m = -13$, los planos no tienen puntos comunes.

EJERCICIO 1.10. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{3}x + y + z = 1\\ x + \frac{1}{3}y + z = 1\\ x + y + \frac{1}{3}z = 1\end{array}\right\}$$

SOLUCION. El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es $|A| = \frac{28}{27} \neq 0$; por tanto, Rango A = Rango M = 3, y el sistema tiene solución única. La aplicación de la regla de Cramer nos da:

$$x = y = z = \frac{3}{7}$$

EJERCICIO 1.11. Discutir según los valores de a y b el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r}x + 3z = a\\ 2x + y = 4\\ 4x + by = 8\end{array}\right\}$$

SOLUCION. La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & b & 0 \end{bmatrix}$, y calculando su determinante resulta $|A| = 6(b - 2)$. Por consiguiente:

* Si $b \neq 2$, Rango A = Rango M = 3, cualquiera que sea a, y el sistema tiene solución única (compatible determinado).
* Si $b = 2$, Rango A = 2.

  La matriz ampliada es $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, que tiene rango dos independientemente del valor de a, luego el sistema tiene infinitas soluciones.

EJERCICIO 1.12. Discutir cuándo el siguiente sistema es compatible y resolverlo en esos casos:

$$\left.\begin{array}{r}x + y + z = 1\\ x + 2y + 3z = 2\\ 2x + 3y + az = 3\end{array}\right\}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = a - 4$, por tanto:

* Si $a \neq 4$, Rango A = Rango M = 3, y el sistema es compatible determinado. Utilizando la regla de Cramer, se obtiene que la solución única de todos los sistemas obtenidos para valores de a distintos de cuatro es $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.
* Si $a = 4$, Rango A = 2, y la matriz ampliada es $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

  Como la cuarta columna de M es igual a la segunda, tenemos que su rango es el mismo que el de A, y el sistema es compatible indeterminado. El sistema en este caso equivale al:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 - z \\ x + 2y &= 2 - 3z \end{aligned}\right\}$$

  Calculados x e y en función de z resulta: $x = z$, $y = 1 - 2z$, luego el conjunto de soluciones es $S = \{(z,\ 1 - 2z,\ z);\ z \in R\}$.

EJERCICIO 1.13. Discutir en función de a el sistema $\left.\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ x + ay &= a \end{aligned}\right\}$ y resolverlo en los casos que sea posible.

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$$

$|A| = a^2 - 1$, que es cero cuando es $a = \pm 1$; por tanto:

* Si a es distinto de 1 y -1, Rango A = 2, y el sistema tiene solución única (compatible determinado). Se observa que en este caso, cualquiera que sea a, la solución es $x = 0$, $y = 1$.
* Si $a = 1$, Rango A = Rango M = 1, y el sistema es compatible indeterminado. El sistema es equivalente al $x + y = 1$, cuyo conjunto de soluciones es $S = \{(x, 1 - x);\ x \in R\}$
* Si $a = -1$, Rango A = Rango M = 1, y el sistema es también compatible indeterminado.

  El sistema es equivalente al $-x + y = 1$, para el que el conjunto de soluciones es $S = \{(x,\ 1 + x);\ x \in R\}$.

El sistema dado es compatible cualquiera que sea el valor de a.

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado corresponden a las de dos rectas en el plano. Dichas rectas son coincidentes si $a = \pm 1$, y se cortan en el punto $(0, 1)$ en los demás casos.

EJERCICIO 1.14. Discutir el sistema de ecuaciones lineales (en función de a y b):

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$$

Resolverlo cuando sea compatible, bien determinado o indeterminado.

SOLUCION. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = 5a$$

Por lo tanto:

* Si $a \neq 0$, Rango $A = 3$, luego Rango $M = 3$ cualquiera que sea b, y el sistema tiene sólo una solución, que hallada por la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ b & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14a - b + 12}{5a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & b & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a + 4b - 48}{5a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5(b - 12)}{5a} = \frac{b - 12}{a}$$

* Si $a = 0$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{bmatrix}$

$$\text{Rango } A = 2 \text{ y } \text{Rango } M = \text{Rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5(b-12)$, tendremos:

Si $b \neq 12$, $\text{Rango } M = 3 \neq \text{Rango } A$, y el sistema es incompatible.
Si $b = 12$, $\text{Rango } M = \text{Rango } A = 2$, y el sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$, que expresando x e y en función de z tiene solución:

$$x = \frac{14 - z}{5} \quad ; \quad y = \frac{4z + 4}{5}$$

Las ecuaciones paramétricas del conjunto de soluciones son entonces:

$$\begin{cases} x = \dfrac{14}{5} - \lambda \\ y = \dfrac{4}{5} + 4\lambda \quad (\lambda \in R) \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado corresponden a las de tres planos. Si $a \neq 0$, los tres planos, cualquiera que sea b, se cortan en el punto de coordenadas $\left(\dfrac{14a - b + 12}{5a}, \dfrac{4a + 4b - 48}{5a}, \dfrac{b - 12}{a}\right)$.

Si $a = 0$ y $b \neq 12$, los planos no tienen puntos comunes y, finalmente, si $a = 0$ y $b = 12$, los tres planos pasan por una misma recta, cuyas ecuaciones paramétricas hemos escrito anteriormente.

EJERCICIO 1.15. Discutir en función de los valores de a y de b el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = b \\ 4x - 5y + az = -10 \end{cases}$$

indicando cuándo es incompatible y cuándo es compatible determinado o compatible indeterminado. Resolverlo en todos los casos en que sea compatible, tanto determinado como indeterminado.

SOLUCION. El determinante de la matriz de coeficientes asociada es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = -3(a+8)$$

Por tanto:

* Si $a \neq -8$, cualquiera que sea el valor de b, Rango A = Rango M = 3, luego el sistema es compatible determinado, siendo la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ b & -1 & -2 \\ -10 & -5 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{ab + 5a + 5b + 40}{3(a+8)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & b & -2 \\ 4 & -10 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{ab - 4b - 10a - 80}{-3(a+8)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & b \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9b}{-3(a+8)}$$

* Si $a = -8$, Rango A = 2, y el rango de M será dos o tres según que sea cero o distinto de cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & b \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 9b$$

Por consiguiente:

Si $b \neq 0$, Rango M = 3, y el sistema es incompatible.

Si $b = 0$, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, las dos primeras ecuaciones son principales y el sistema equivale al $\left.\begin{matrix} x + y + z = 5 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{matrix}\right\}$, en el que despejando x e y en función de z resulta:

$$x = \frac{5+z}{3} \quad ; \quad y = \frac{10-4z}{3}$$

Es decir, las infinitas soluciones son los elementos del conjunto definido por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5/3 + \lambda \\ y = 10/3 - 4\lambda \quad (\lambda \in R) \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica: La posición relativa de los tres planos definidos por las ecuaciones del sistema es:

* Si $a \neq -8$, cualquiera que sea el valor de b, los planos tienen en común el punto de coordenadas $\left(\dfrac{ab + 5a + 5b + 40}{3(a + 8)}, \dfrac{ab - 4b - 10a - 80}{-3(a + 8)}, \dfrac{9b}{-3(a + 8)}\right)$.
* Si $a = -8$ y $b \neq 0$, los planos no tienen puntos comunes.
* Si $a = -8$ y $b = 0$, los tres planos pasan por una recta, y las coordenadas, $\left(\dfrac{5}{3} + \lambda, \dfrac{10}{3} - 4\lambda, 3\lambda\right)$, de sus infinitos puntos, son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.16. Averiguar para qué valores de a y b, el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y + az = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, resolviéndolo en los casos que sea compatible, determinado o indeterminado.

SOLUCION. Observando las dos últimas ecuaciones se deduce que si $b \neq 3$, el sistema es incompatible, puesto que ninguna terna (x, y, z) puede satisfacer las dos ecuaciones simultáneamente. El estudio se reduce entonces al sistema obtenido para $b = 3$, del cual podemos suprimir la cuarta ecuación. Para dicho sistema, las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Puesto que $|A| = 3(a - 1)$, tenemos:

* Si $a \neq 1$, $\text{Rango}\,A = 3$, lo que implica que $\text{Rango}\,M = 3$, y el sistema es compatible determinado. La solución podemos obtenerla aplicando la regla

de Cramer, aunque es claro que de la observación de la segunda y tercera ecuación, se deduce que $z = 0$, y como $x = 1$, $y = 2$, es la solución del sistema $\left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\}$, tenemos que, independientemente del valor de a, la solución única del sistema es $x = 1$; $y = 2$; $z = 0$.

- Si $a = 1$, el sistema equivale al $\left\{\begin{matrix} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{matrix}\right.$, cuyo conjunto de soluciones es $S = \{(1, 2 - z, z);\ z \in \mathbb{R}\}$.

Interpretación geométrica: Si $b \neq 3$, los planos dados por las dos últimas ecuaciones del sistema son paralelos en sentido estricto (no coincidentes), y puesto que no hay puntos comunes a los dos, tampoco hay puntos que pertenezcan a los cuatro planos. Si $b = 3$, las ecuaciones representan tres planos cuya posición relativa es:

- Si $a \neq 1$, independientemente de su valor, los planos se cortan en el punto $(1, 2, 0)$.
- Si $a = 1$, los tres planos pasan por la recta cuya ecuación cartesiana es $\left\{\begin{matrix} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{matrix}\right.$.

EJERCICIO 1.17. Discutir, según los valores de a y b, el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x + y + az = 1 \\ 2x + ay = b \\ ax + y + z = b^2 \end{matrix}\right\}$$

SOLUCION. El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2 = -(a - 1)^2(a + 2)$$

luego se anula para $a = 1$ y $a = -2$. Por consiguiente, tenemos:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, Rango $A = 3$ y Rango $M = 3$, cualquiera que sea el valor de b, luego el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1$, Rango $A = 2$, y el rango de la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & b^2 \end{bmatrix}$$

será dos o tres según que sea cero o distinto de cero el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 1 - b^2$$

Por consiguiente:

$$\text{Rango}\, M = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad b = 1 \text{ ó } b = -1 \\ 3 & \text{si} \quad b \neq 1 \text{ y } b \neq -1 \end{cases}$$

luego la discusión en este caso es:

— Si $a = 1$ y $b = 1$ ó $b = -1$, el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado), que son las de los sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 - z \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= 1 - z \\ 2x + y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

— Si $a = 1$ y $b \neq 1$ y $b \neq -1$, el sistema es incompatible.

* Si $a = -2$, Rango $A = 2$, y la matriz ampliada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & b \\ -2 & 1 & 1 & b^2 \end{bmatrix}$$

tiene rango dos o tres según que sea nulo o no el menor.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & b \\ -2 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = -4b^2 - 3b - 2$. Puesto que la ecuación $-4b^2 - 3b - 2 = 0$ no tiene soluciones reales, se tiene que, cualquiera que sea b, Rango $M = 3$ y el sistema es incompatible.

EJERCICIO 1.18. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x + y - mz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

para los valores de m para los que admite soluciones distintas de la (0, 0, 0).

SOLUCION. La condición para que el sistema homogéneo dado admita soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas. Es decir, que $|A| = 0$.

Puesto que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = m - 3$$

$|A| = 0$, para $m = 3$, y se pide resolver el sistema obtenido para este valor del parámetro m. En este caso, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas son principales, y el sistema equivale al

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= -5z \\ x + y &= -z \end{aligned}\right\}$$

Despejando x e y, se obtiene $x = 2z$, $y = -3z$. Es decir, el conjunto de soluciones es $S = \{(2z, -3z, z); z \in \mathbb{R}\}$, que expresado por sus ecuaciones paramétricas es

$$S \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

EJERCICIO 1.19. Calcular a para que sea compatible el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ ax - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo en ese caso.

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Puesto que M es una matriz cuadrada de orden 4 y A tiene a lo sumo Rango 3, la condición para que las dos matrices puedan tener el mismo rango, es decir, para que el sistema pueda ser compatible es que $|M| = 0$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8(2 - a) = 0 \rightarrow a = 2$$

Para $a = 2$ es entonces $\operatorname{Rango} M < 4$, y puesto que el menor de la matriz A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

se tiene que $\operatorname{Rango} A = \operatorname{Rango} M = 3$, y como 3 es también el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Obtendremos la solución única aplicando la regla de Cramer al sistema equivalente obtenido al suprimir la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ x - y + z = -2 \end{array}\right\}$$

y resulta $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

EJERCICIO 1.20. Indicar razonadamente si los dos siguientes sistemas lineales son equivalentes:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = 4} \\ \mathbf{3x + 2y + z = 6} \\ \mathbf{2x + y - 2z = 2} \end{array}\right\} \; ; \; \left.\begin{array}{l} \mathbf{x - y + z = 0} \\ \mathbf{y = 2} \\ \mathbf{x + y - z = 2} \end{array}\right\}$$

SOLUCION. Dos sistemas compatibles de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Un recurso entonces para comprobar si dos sistemas son equivalentes es comparar sus soluciones, aunque un método más ágil, que no necesita del cálculo de las soluciones, es comprobar en primer lugar que el número de ecuaciones independientes en cada uno de los sistemas es el mismo, y después comprobar si las ecuaciones de cada sistema son combinación lineal de las del otro.

Si M_1 es la matriz ampliada del primero de los sistemas, resulta que $\operatorname{Rango} M_1 = 2$, y siendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, las dos primeras ecuaciones son independientes, y la tercera es combinación lineal de ellas. El sistema equivale al:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Si M_2 es la matriz ampliada correspondiente al segundo sistema, se tiene que $\operatorname{Rango} M_2 = 3$, y las tres ecuaciones son independientes.

Puesto que el número de ecuaciones independientes de los dos sistemas no coincide, los sistemas no son equivalentes.

Observar que las soluciones del primer sistema son las coordenadas de los infinitos puntos de la recta definida por las ecuaciones (1), y, sin embargo, el segundo sistema tiene solución única.

EJERCICIO 1.21. Discutir y resolver en su caso, según los valores de los parámetros λ y μ, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \mu \\ 2x - 5y + \lambda z = -2 \end{cases}$$

SOLUCION. Las matrices de coeficientes y ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \\ 2 & -5 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de A obtenemos $|A| = 13(\lambda - 1)$, luego:

* Si $\lambda \neq 1$, Rango A = 3, e independientemente del valor de μ Rango M = 3. El sistema es compatible determinado, y la solución única obtenida por la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mu & 4 & 1 \\ -2 & -5 & \lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\lambda\mu - 10\mu + 4\lambda + 23}{13(\lambda - 1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & \mu & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3\lambda\mu - 4\mu - \lambda + 4}{13(\lambda - 1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & \mu \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\mu - 3}{\lambda - 1}$$

* Si $\lambda = 1$, Rango A = 2, y la matriz ampliada tiene rango 2 ó 3 según que sea cero o distinto de cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & \mu \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(\mu - 3)$$

Por consiguiente:

— Si $\mu \neq 3$, Rango M = 3, y el sistema es incompatible.
— Si $\mu = 3$, Rango A = Rango M = 2 < número incógnitas, y el sistema es

compatible indeterminado. El sistema es equivalente al formado por las dos primeras ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - y = 1 - 2z \\ x + 4y = 3 - z \end{cases}$$

Despejando x e y en términos de z se tiene $x = \dfrac{7 - 9z}{13}$; $y = \dfrac{8 - z}{13}$, luego el conjunto de las infinitas soluciones del sistema es:

$$S = \left\{ \left(\frac{7 - 9z}{13}, \frac{8 - z}{13}, z \right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$S \equiv \begin{cases} x = \dfrac{7}{13} - 9z \\ y = \dfrac{8}{13} - \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 13\lambda \end{cases}$$

Interpretación geométrica: Las ecuaciones del sistema dado corresponden a los de tres planos:

* Si $\lambda \neq 1$, independientemente del valor de μ los tres planos se cortan en un punto.
* Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 3$, los planos no tienen puntos comunes, y como no hay dos paralelos, forman en este caso una superficie prismática triangular.
* Si $\lambda = 1$ y $\mu = 3$, los tres planos pasan por la recta

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

y las coordenadas $\left(\dfrac{7}{13} - 9\lambda, \dfrac{8}{13} - \lambda, 13\lambda \right)$ de sus infinitos puntos son las infinitas soluciones del sistema.

EJERCICIO 1.22. Eliminar los parámetros λ y μ en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 1 = 4\lambda + \mu \\ y - 2 = 3\lambda - \mu \\ z = -\lambda + 2\mu \end{cases}$$

SOLUCION. Las ecuaciones dadas definen un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$. Eliminar los parámetros λ y μ significa encontrar un sistema de ecuaciones lineales independientes con tres incógnitas, cuyo conjunto de soluciones sea S. Para ello podemos actuar de dos modos:

Primer método. El hecho de que para cada $(x, y, z) \in S$, el sistema entendido como sistema de 3 ecuaciones y dos incógnitas, λ y μ, debe ser conpatible, exige que:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 3 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix}$$

lo que equivale a que:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & x-1 \\ 3 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x - 9y - 7z + 13 = 0$$

Segundo método. Sumando las dos primeras ecuaciones y despejando, se tiene:

$$\lambda = \frac{1}{7}(x + y - 3)$$

y de la segunda ecuación es:

$$\mu = 3\lambda - y + 2 = \frac{3}{7}(x + y - 3) - y + 2 = \frac{1}{7}(3x - 4y + 5)$$

llevados los valores obtenidos de λ y μ a la tercera ecuación, se obtiene finalmente:

$$z = -\frac{1}{7}(x + y - 3) + \frac{2}{7}(3x - 4y + 5),$$

de donde

$$5x - 9y - 7z + 13 = 0$$

Comentario. En las ecuaciones dadas podemos reconocer las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $A(1, 2, 0)$ y tiene vectores directores $\vec{u} = (4, 3, -1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 2)$. Puesto que el resultado de eliminar parámetros es la ecuación implícita o cartesiana de dicho plano, la ecuación buscada es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 1 \\ y-2 & 3 & -1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x - 9 - 7z + 13 = 0$$

Capítulo 2

ESPACIOS AFIN Y EUCLIDEO TRIDIMENSIONALES

CUESTIONES

CUESTION 2.1. Demostrar que la ecuación de un plano que pasa por los puntos $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$ es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

SOLUCION. Los puntos $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ no están alineados por pertenecer cada uno de ellos a un eje coordenado del sistema de referencia; por consiguiente, determinan un plano.

La terna $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$ es una determinación lineal del plano ABC, donde los vectores directores tienen componentes: $\overline{AB} = (-a, b, 0)$; $\overline{AC} = (-a, 0, c)$.

La ecuación general del plano es entonces:

$$\begin{vmatrix} x - a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene $bcx + acy + abz - abc = 0$, y dividiendo esta ecuación por el producto abc (suponemos $abc \neq 0$), se tiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

CUESTION 2.2. En un sistema de referencia ortonormal se considera el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$. Demostrar que el vector (A, B, C) es normal a dicho plano.

SOLUCION. Dados dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ del plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, el vector definido por ellos tiene componentes $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

El producto escalar de los vectores $\vec{u} = (A, B, C)$ y $\overrightarrow{PQ}$ es entonces $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PQ} = A(x_2 - x_1 + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = D - D = 0$, por satisfacer las coordenadas de los puntos P y Q la ecuación del plano. Por tanto, el vector $\vec{u}$ es ortogonal al vector definido por cualquier pareja de puntos del plano, luego es normal a dicho plano.

CUESTION 2.3. Deducir la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z = z_1}{c}$$

$$s \equiv \frac{x - x_2}{a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{c}$$

SOLUCION. Las rectas r y s son paralelas, pues el vector $\vec{u} = (a, b, c)$ es un vector director de ambas.

$R(x_1, y_1, z_1)$ es un punto de r y $S(x_2, y_2, z_2)$ es un punto de s. Si los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, es decir, tienen igual dirección, las rectas son coincidentes y la distancia entre ellas es cero.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{RS}$ son independientes, esto es, Rango $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & a \\ y_2 - y_1 & b \\ z_2 - z_1 & c \end{bmatrix} = 2$,

entonces las rectas r y s son paralelas en sentido estricto, y la distancia entre ellas es igual a la distancia de un punto de una a la otra.

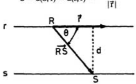
Sean R un punto de r, S un punto de s, $\vec{r}$ un vector director de r y d la distancia del punto S a la recta r.

Observando la figura tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{|\overrightarrow{RS}|} \rightarrow d = |\overrightarrow{RS}| \operatorname{sen}\theta$$

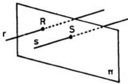
y recordando que $|\overrightarrow{RS} \wedge \vec{r}| = |\overrightarrow{RS}||\vec{r}| \operatorname{sen}\theta$ resulta:

$$d = d(S, r) = d(s, r) = \frac{|\overrightarrow{RS} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$



Otro procedimiento: Suponiendo r y s paralelas no coincidentes, tomemos el punto $R(x_1, y_1, z_1)$ de r y el plano que pasa por R y es perpendicular a r (y a s). La ecuación de este plano es:

$$\pi\colon a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$



cortando el plano π con la recta s se obtiene el punto S, y la distancia entre los puntos R y S coincide con la distancia entre las rectas.

CUESTION 2.4. Explicar las posiciones relativas de las rectas

$$r\colon \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} Ex + Fy + Gz + H = 0 \\ E'x + F'y + G'z + H' = 0 \end{cases}$$

Indicar, razonadamente, la posición relativa de las rectas $x = y = 2z$ y $x - a = y = 2z$, en función del parámetro a.

SOLUCION. Para estudiar las posiciones relativas de dos rectas usando sus ecuaciones implícitas, consideramos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$S\colon \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ Ex + Fy + Gz + H = 0 \\ E'x + F'y + G'z + H' = 0 \end{cases}$$

Denotaremos por A a la matriz de coeficientes del sistema S y por M a su matriz ampliada. Se tiene:

* Si $\text{Rango}\,A = \text{Rango}\,M = 2$, las rectas r y s son coincidentes.
* Si $\text{Rango}\,A = \text{Rango}\,M = 3$, las rectas r y s son secantes. Las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema S.
* Si $\text{Rango}\,A = 2$ y $\text{Rango}\,M = 3$, las rectas r y s son paralelas no coincidentes.
* Si $\text{Rango}\,M = 4 \leftrightarrow |M| \neq 0$, las rectas r y s se cruzan.

Consideremos ahora las rectas r: $x - a = y = 2z$; s: $x = y = 2z$. Las ecuaciones implícitas de r y s son:

$$r: \begin{cases} x - y = a \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

y las matrices de coeficientes y ampliada del sistema formado por ellas son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Independientemente de a, Rango $A = 2$, y puesto que el rango de M es igual al rango de

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2a$$

tendremos:

* Si $a = 0$, Rango A = Rango $M = 2$, y r y s son coincidentes.
* Si $a \neq 0$, Rango $A = 2$ y Rango $M = 3$, y las rectas r y s son paralelas no coincidentes.

Otro procedimiento: Estudiemos ahora la posición relativa de las rectas r y s usando las ecuaciones en forma continua dadas originalmente:

$$r: x - a = y = 2z \quad ; \quad s: x = y = 2z$$

de ellas tenemos que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ es un vector director de las dos rectas, luego sólo pueden ser coincidentes o paralelas en sentido estricto (la dirección de r no depende de a, sólo depende su posición).

R(a, 0, 0) es un punto de r y S(0, 0, 0) un punto de S, y el vector definido por ellos es $\overrightarrow{SR} = (a, 0, 0)$, luego es:

$$\text{Rango}(\vec{u}, \overrightarrow{SR}) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = 0 \\ 2, & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

y, por consiguiente:

* Si $a = 0$, r y s son coincidentes.
* Si $a \neq 0$, r y s son paralelas no coincidentes.

CUESTION 2.5. Demostrar que dados cuatro puntos A, B, C, D, cualquiera de un plano, se verifica que:

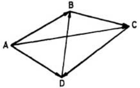
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

SOLUCION. Sea $P = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$. Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, tenemos que

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} =$$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} =$$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$$



Sustituyendo en P obtenemos:

$$P = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) =$$

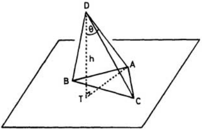
$$= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}) = 0$$

Nota: El resultado es cierto para cuatro puntos cualesquiera del espacio, no necesariamente coplanarios.

CUESTION 2.6. Demostrar la fórmula que da el volumen de un tetraedro en función de las coordenadas de sus vértices. Aplicación: volumen del tetraedro formado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$, $3x + 2y + z = 15$.

SOLUCION. Sea el tetraedro ABCD, y supongamos que las coordenadas de los vértices en un sistema de referencia ortonormal son:

$$A(a_1, a_2, a_3) \quad ; \quad B(b_1, b_2, b_3) \quad ; \quad C(c_1, c_2, c_3) \quad ; \quad D(d_1, d_2, d_3)$$



El volumen del tetraedro es

$$v = \frac{1}{3}(\text{área de la base}) \times (\text{altura})$$

Tomemos el triángulo ABC como base, y sea T el pie de la perpendicular trazada por D al plano ABC. La altura es $h = DT$.

Si θ es el ángulo ADT, θ es igual o suplementario al ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (dependiendo del sentido de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$), luego $\cos\theta = |\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

Recordando que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$, y teniendo en cuenta que $h = |\overrightarrow{AD}|\cos\theta$, tenemos:

$$v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$$

Es decir:

$$v = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

Los vértices del tetraedro limitado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$, $3x + 2y + z = 15$, se obtienen resolviendo los sistemas formados por cada tres de las ecuaciones de las caras, es decir, los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \text{Solución: } A(0,0,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{array}\right\} \text{Solución: } B(5,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{array}\right\} \text{Solución: } C(0,0,15) \qquad \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{array}\right\} \text{Solución: } D(3,3,0)$$

Por consiguiente:

$$v = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{75}{2} \text{ unidades cúbicas}$$

CUESTION 2.7. Si el volumen de un tetraedro regular es v, dar en términos de v el área de dicho tetraedro.

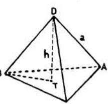
SOLUCION. Sea a la arista del tetraedro. En el triángulo rectángulo BPT es

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a/2}{BT}$$

luego $BT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

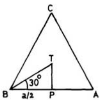
En el triángulo rectángulo DTB se tiene:

$$h = DT = \sqrt{DB^2 - BT^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



El área de la cara del tetraedro es:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \wedge \overline{AC}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{AC}| \operatorname{sen} 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



y el volumen del tetraedro en función de la arista es:

$$v = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \to a = \sqrt[3]{6\sqrt{2v}}$$

Por tanto, tenemos:

$$\text{Area tetraedro} = 4S_{ABC} = a^2\sqrt{3} = \sqrt[3]{72v^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt[3]{9v^2}\sqrt{3}$$

EJERCICIOS

EJERCICIO 2.1. Ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación

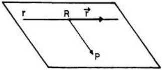
$$r: \begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0 \\ x + 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto P(0, 1, −2).

SOLUCION. Para calcular el plano que contiene a una recta r y pasa por un punto P no perteneciente a ella, procedemos como sigue: Si $\vec{r}$ es un vector director de la recta y $\overline{RP}$ el vector que une un punto de la recta r y el punto P, entonces la terna $(P; \vec{r}, \overline{RP})$ es una determinación lineal del plano buscado.

En nuestro caso es P(0, 1, −2), y sabemos que las componentes de los vectores directores de la recta r satisfacen las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$



por lo tanto, $\vec{r} = (0, 1, 1)$ es, por ejemplo, un vector director de la recta r.

Las coordenadas de los puntos de la recta r son las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z - 5 &= 0 \\ x + 2y - 2z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Hallando x e y en función de z obtenemos:

$$x = \frac{8}{5} \quad ; \quad y = z - \frac{9}{5}$$

luego, por ejemplo, para z = 0 es R(8/5, −9/5, 0) un punto de r, y el vector $\overline{RP}$ es $\overline{RP} = (-8/5, 14/5, -2)$. La ecuación del plano pedido es entonces:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -\frac{8}{5} \\ y-1 & 1 & \frac{14}{5} \\ z+2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \frac{8}{5}(3x + y - z - 3) = 0$$

$$3x + y - z = 3$$

EJERCICIO 2.2. Hallar el simétrico A′ del punto A(−2, 0, 2) respecto de la recta

$$\mathbf{r:} \begin{cases} \mathbf{2x - y - 1 = 0} \\ \mathbf{z = 1} \end{cases}$$

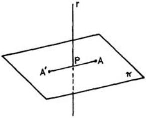
(Nota: La recta AA′ debe ser perpendicular a la recta precedente y cortarla en el punto medio del segmento AA′.)

SOLUCION. Sea π el plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r dada. $\vec{r} = (1, 2, 0)$ es un vector director de la recta r y, por consiguiente, normal al plano π. La ecuación de π será entonces $x + 2y + D = 0$, y puesto que $A(-2, 0, 2)$ es un punto de él, es $D = 2$. Luego $\pi \equiv x + 2y + 2 = 0$.

Cortando r y π, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0 \\ z &= 1 \\ x + 2y + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \to P(0, -1, 1)$$

(P es también el punto de corte de las rectas r y AA').



Si $A'(x, y, z)$, de la condición de que P es el punto medio del segmento AA', se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{2} &= 0 \\ \frac{y+0}{2} &= -1 \\ \frac{z+2}{2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

luego $A'(2, -2, 0)$ es el simétrico pedido.

EJERCICIO 2.3. Calcular la mínima distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2} \quad y \quad s \equiv x + 2 = y - 1 = z - 3$$

SOLUCION. Las rectas r y s están dadas por su ecuación en forma continua, y se desprende que $\vec{r} = (2, 1, -2)$ es un vector director de r, $\vec{s} = (1, 1, 1)$ un vector director de s, R(1, 3, 0) un punto de r y S(−2, 1, 3) un punto de s.

$\vec{RS} = (-3, -2, 3)$ y, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, los vectores $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\vec{RS}$ son linealmente independientes y, por consiguiente, las rectas r y s se cruzan.

La mínima distancia entre las rectas r y s viene dada entonces por la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{r}, \vec{s}, \vec{RS}]|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|}$$

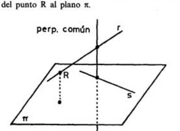
donde el numerador es el valor absoluto del producto mixto de los vectores $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\vec{RS}$, siendo $\vec{r}$ y $\vec{s}$ vectores directores de las rectas r y s, respectivamente, y $\vec{RS}$ el vector definido por un punto R de r y un punto S de s.

$$[\vec{r}, \vec{s}, \vec{RS}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad \vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{r} \wedge \vec{s}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

Por tanto, la mínima distancia pedida es $d(r, s) = \dfrac{2}{\sqrt{26}}$ unidades.

Otro procedimiento: Sea π el plano que contiene a s y es paralelo a r, y R un punto cualquiera de la recta r. La mínima distancia entre las rectas r y s coincide con la distancia del punto R al plano π.



Si S es un punto de la recta s y $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de r y s, respectivamente, entonces una determinación lineal del plano π es:

$$(S; \vec{r}, \vec{s})$$

tenemos $S(-2,1,3)$, $\vec{r}=(2,1,-2)$ y $\vec{s}=(1,1,1)$, luego la ecuación de π es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando obtenemos $\pi \equiv 3x-4y+z+7=0$.

Recordando que la distancia del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

si tomamos, por ejemplo, $R(1,3,0)$, el punto de la recta r será:

$$d(r,s)=d(R,\pi)=\frac{|3-12+0+7|}{\sqrt{26}}=\frac{2}{\sqrt{26}} \text{ unidades}$$

EJERCICIO 2.4. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$. Obtener un vector de dirección, calcular la ecuación del plano que determinan esa recta y el origen de coordenadas y hallar la distancia de dicha recta al punto $P(1,0,0)$.

SOLUCION. Los componentes de los vectores directores de la recta r verifican $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, luego, por ejemplo, $\vec{r}=(0,0,1)$ es un vector director.

$\beta(x+2)+\alpha(y-1)=0$ es la ecuación general de los planos que pasan por la recta r. De los planos de este haz, el que pasa por el origen de coordenadas corresponde a $2\beta=\alpha$ (reemplazando en la ecuación del haz x, y, z por 0, 0, 0) y, por consiguiente, el plano pedido es:

$$x+2y=0$$

Dicho plano también podíamos haberlo obtenido observando que $(O;\vec{r},\overrightarrow{RO})$ es una determinación lineal del mismo, en donde O es el origen, R un punto de r y $\vec{r}$ un vector director.

Recordando que la distancia de un punto P a una recta r viene dada por la expresión:

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{PR}\wedge\vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

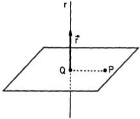
en donde $\vec{r}$ es un vector director de r y R un punto cualquiera de ella. Si en el caso que nos ocupa tomamos $R(-2,1,0)$, será $\overrightarrow{PR} = (-3,1,0)$, y como es:

$$\overrightarrow{PR} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

tenemos que la distancia pedida es:

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10} \text{ unidades}$$

Si no queremos recurrir a la fórmula para el cálculo de la distancia de P a la recta r, podemos proceder como sigue: tomamos el plano que pasa por P y es perpendicular a r, y lo intersectamos con r. La distancia de P al punto de intersección es también la distancia de P a r.



Como $\vec{r} = (0,0,1)$ es un vector director de r, los planos perpendiculares a ella son los de ecuación $z = k$. De ellos, el que pasa por P es el $z = 0$, que intersecta a r en $Q(-2,1,0)$.

La distancia de P a r es entonces igual a $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-3,1,0)| = \sqrt{10}$ unidades.

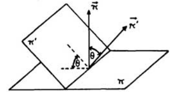
EJERCICIO 2.5. Calcular el ángulo formado por los planos:

$$\mathbf{3x - 4y - 1 = 0 \quad y \quad 12x + 4y - 3z = 0}$$

SOLUCION. Recordemos que el ángulo que forman dos planos es el menor de los ángulos diedros que definen dichos planos (en el dibujo, θ).

Si $\vec{\pi}$ y $\vec{\pi}'$ son vectores normales a los planos π y π', respectivamente, θ y $(\widehat{\vec{\pi}, \vec{\pi}'})$ son iguales o suplementarios (según sea el sentido de los vectores normales). Por tanto:

$$\cos\theta = |\cos(\widehat{\vec{\pi}, \vec{\pi}'})| = \frac{|\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}'|}{|\vec{\pi}||\vec{\pi}'|}$$



Si $\pi \equiv 3x - 4y - 1 = 0$ y $\vec{\pi}' \equiv 12x + 4y - 3z = 0$, entonces $\vec{\pi} = (3, -4, 0)$ y $\vec{\pi}' = (12, 4, -3)$ son vectores normales, luego:

$$\cos\theta = |\cos(\widehat{\vec{\pi}, \vec{\pi}'})| = \frac{|36 - 16|}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \frac{4}{13}$$

θ es el ángulo agudo cuyo coseno es $4/13$, resultando $\theta = 72° 4' 47''$.

EJERCICIO 2.6. Dado el punto $A(-1, 0, 2)$ y las rectas:

$$r \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

obtener la ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a r y a s.

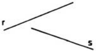
SOLUCION. La recta s viene dada por su ecuación continua y $\vec{s} = (-1, 3, 4)$ es un vector director. La recta r está dada por sus ecuaciones cartesianas o implícitas, y las componentes de los vectores directores de r son las soluciones de:

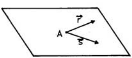
$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo queda $x = y = z$. Por tanto, por ejemplo, $\vec{r} = (1, 1, 1)$ es un vector director de r.

$(A; \vec{r}, \vec{s})$ es una determinación lineal del plano que pasa por A y es paralelo a las rectas r y s, luego su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z-2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 5y + 4z = 7$$





EJERCICIO 2.7. Calcular k para que el plano x + 3y + kz + 8 = 0 sea paralelo a la recta:

$$r \begin{cases} 5x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION. La condición para que la recta sea paralela al plano es que no tengan puntos comunes, es decir, el sistema formado por sus ecuaciones sea incompatible.

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & k \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & k & 8 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

la condición es que $\text{Rango}\, A \neq \text{Rango}\, M$.

Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rango M = 3, y deberá ser entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12(k+2) = 0, \quad \text{de donde} \quad k = -2$$

Otro procedimiento: $\vec{r} = (-1, 1, 1)$ es un vector director de la recta r, y sabemos que las componentes de los vectores paralelos al plano $x + 3y + kz + 8 = 0$ son soluciones de $x + 3y + kz = 0$. Por consiguiente, para que r sea paralela al plano, debe ser:

$$-1 + 3 + k = 0, \quad \text{luego} \quad k = -2$$

EJERCICIO 2.8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 4, 0) y es perpendicular al plano $2x - 3y - z + 1 = 0$.

SOLUCION. Las rectas perpendiculares a un plano son las que tienen la dirección de un vector normal. Si $\pi \equiv 2x - 3y - z + 1 = 0$, $\vec{\pi} = (2, -3, -1)$ es un vector normal, luego la recta pedida es la que pasa por A y tiene vector director $\vec{\pi}$. Su ecuación será:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = -t \end{array}\right\} \text{(ecuación paramétrica), o bien} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{-1}$$

si queremos expresarla por su ecuación continua.

EJERCICIO 2.9. Determinar a y b para que la recta r esté contenida en el plano π, siendo:

$$r: \begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x + by + z = 3 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv x - y - z + 2 = 0$$

SOLUCION. La condición necesaria y suficiente para que r esté contenida en el plano π es que el sistema formado con sus ecuaciones sea compatible e indeterminado. Por tanto, si

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad M = \begin{bmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

la condición será que Rango A = Rango M = 2, y por ello, orlando el menor de orden dos que se ha señalado en la matriz M, debemos exigir que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ b & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(2-b) = 0 \rightarrow \quad b = 2$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \qquad a + 8 = 0 \rightarrow \quad a = -8$$

EJERCICIO 2.10. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P(1,2,1)$, calcular:

a) Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

b) El punto de intersección de r y s.

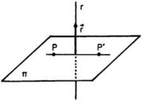
c) Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

SOLUCION. a) La recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r es la recta que pasa por P y por el punto de intersección de r con el plano por P perpendicular a ella.

$\vec{r} = (1,1,4)$ es un vector director de r, luego los planos perpendiculares a r tienen ecuación $x + y + 4z + D = 0$. De ellos, el que pasa por P es el correspondiente a $D = -7$, luego $\pi \equiv x + y + 4z - 7 = 0$ es el plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Cortando r y π obtenemos:

$$r \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$



sustituyendo en la ecuación de π, queda $18t + 6 = 0$, luego el punto Q de intersección es el punto de r correspondiente al valor del parámetro

$$t = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}, \quad \text{o sea} \quad Q\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

La recta s pedida es la recta PQ, y al ser el vector $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(-7, -1, 2)$, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

b) El punto de intersección es el Q obtenido en el apartado anterior.

c) El simétrico $P'(x, y, z)$ de P respecto de r será tal que el punto medio del segmento PP' es Q, de donde:

$$\frac{x+1}{2} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{y+2}{2} = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \frac{z+1}{2} = \frac{5}{3}$$

despejando x, y, z se obtiene $P'\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

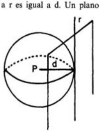
EJERCICIO 2.11. Por la recta r: $\begin{cases} x - z = 4 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$ trazar un plano que diste dos unidades del punto P(0, 5, 0).

SOLUCION. Hagamos un análisis del problema general de trazar un plano que pase por una recta r y diste d unidades de un punto P.

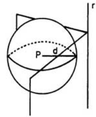
Los planos que distan d unidades de P son los planos tangentes a la esfera de centro P y radio d. Por tanto:

1.º) Si la distancia de P a r es menor que d, no hay solución, pues r, y por tanto todos los planos que pasan por ella, atraviesan la esfera.

2.º) La distancia de P a r es igual a d. Un plano solución.



3.º) La distancia de P a r es mayor que d. Dos planos solución.



En nuestro caso, $\vec{r} = (1, 0, 1)$ es un vector director de r y R(4, 3, 0) un punto de ella, y tenemos:

$$\overrightarrow{PR} = (4, -2, 0) \quad ; \quad \overrightarrow{PR} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}, \text{ y } |\overrightarrow{PR} \wedge \vec{r}| = \sqrt{24}$$

$d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{PR} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} > 2$, y el problema tiene entonces dos soluciones. Hallémoslas.

$\alpha(x - z - 4) + \beta(x + y - z - 7) = 0$ es la ecuación del haz de planos que pasan por r, y de ellos buscamos los que distan 2 unidades de P.

Si escribimos el haz en la forma

$$(\alpha + \beta)x + \beta y - (\alpha + \beta)z - 4\alpha - 7\beta = 0 \quad (1)$$

y recordando que P(0, 5, 0) debe ser:

$$\frac{|5\beta - 4\alpha - 7\beta|}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2}} = 2$$

o sea, $|-4\alpha - 2\beta| = 2\sqrt{2(\alpha + \beta)^2 + \beta^2}$. Elevando al cuadrado los dos miembros y efectuando operaciones, se tiene finalmente $\alpha^2 = \beta^2$, y de aquí $\alpha = \pm\beta$. Es decir, los planos buscados son los del haz (1) correspondientes a $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$. Haciendo en (1) $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$, obtenemos:

$$\alpha(2x + y - 2z - 11) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(y - 3) = 0$$

los planos pedidos son $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 11 = 0$ y $\pi_2 \equiv y - 3 = 0$.

EJERCICIO 2.12. Estudiar, según los valores de a, la posición relativa del plano π y la recta r:

$$\pi \equiv ax + (a-1)y + z = 0 \quad ; \quad r \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

SOLUCION. $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$. La posición entre r y π la estudiaremos analizando según los valores de a el tipo de sistema que forman sus ecuaciones.

$A = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ son las matrices de coeficientes y ampliada de dicho sistema.

$|A| = 2 - a$, luego:

* Si $a \neq 2$, Rango A = Rango M = 3, y el sistema tiene solución única, lo cual significa que r y π se cortan en un punto.
* Si $a = 2$, Rango A = 2 y Rango M = 3, y el sistema es incompatible, esto es, r es paralela a π en sentido estricto.

Otro procedimiento: Recordando que los vectores paralelos al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ son aquellos cuyas componentes verifican $Ax + By + Cz = 0$, tenemos que como $\vec{r} = (0, -1, 1)$ es un vector director de r, la condición para que r sea paralela a π es:

$$a \cdot 0 + (a-1)(-1) + 1 = 0 \rightarrow a = 2$$

Para $a = 2$, la ecuación de π es $2x + y + z = 0$, y un punto de r, por ejemplo, $R(1, 0, 0)$, no satisface dicha ecuación, esto es, no pertenece a π. La recta r es entonces paralela a π estrictamente.

En resumen:

* Si $a = 2$, r es paralela a π (estrictamente).
* Si $a \neq 2$, r corta a π en un punto.

EJERCICIO 2.13. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x+1}{2} = y = 1 - z \quad y \quad s: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}$$

SOLUCION. A la vista de las ecuaciones tenemos

$\vec{r} = (2, 1, -1)$ es un vector director de r, y $\vec{s} = (1, 2, -1)$ de s.

$R(-1, 0, 1)$ es un punto de r y $S(-1, 1, 0)$ de s, y el vector definido por ellos es $\overrightarrow{RS} = (0, 1, -1)$.

Puesto que las componentes de $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son proporcionales, es decir, los vectores tienen dirección distinta, las rectas r y s no son paralelas.

Por tanto, se cortarán en un punto o se cruzarán, según sean dependientes o independientes los vectores $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\overrightarrow{RS}$.

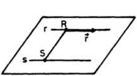
Como es $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, los tres vectores son independientes y las rectas se cruzan en el espacio.

EJERCICIO 2.14 Hallar el plano determinado por las rectas:

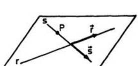
$$r: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2} \qquad s: \begin{cases} 2x + y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION. Dos rectas determinan un plano en los casos:

a) Son paralelas. El plano que las contiene tiene determinación lineal $(R; \vec{r}, \overrightarrow{RS})$, donde R es un punto de r, $\vec{r}$ un vector director y S un punto de s.



b) Se cortan en un punto. Una determinación lineal del plano que las contiene es $(P; \vec{r}, \vec{s})$, donde P es un punto de r o de s, y $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de r y s, respectivamente.



En nuestro caso se tiene: $\vec{r} = (1, 2, -2)$ es un vector director de r y de s, luego las rectas son paralelas.

$R(0, -1, 2)$ es un punto de r y $S(1, 3, 0)$ de s, y $\overrightarrow{RS} = (1, 4, -2)$.

La ecuación del plano que contiene a r y s es entonces:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 4 \\ z-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + z = 2$$

EJERCICIO 2.15. Para cada valor de p la ecuación $x + 2y + 3z = p$ representa un plano.

a) Probar que cualquiera de ellos son paralelos.

b) Hallar el plano π de este conjunto que pasa por el origen.

c) Calcúlese la distancia del plano $x + 2y + 3z = p$ al plano π del apartado anterior.

SOLUCION:

a) Dados $\pi_1 \equiv x + 2y + 3z = p_1$; $\pi_2 \equiv x + 2y + 3z = p_2$.

Rango $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1$, y los planos son paralelos.

b) El plano que pasa por el origen corresponde al valor de p para el que al sustituir x, y, z por 0, 0, 0 sea cierta la igualdad. Es decir, para $p = 0$, y el plano es:

$$\pi \equiv x + 2y + 3z = 0$$

c) La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia de un punto de uno de ellos al otro. Como el origen es un punto de π, tenemos que si $\pi_p \equiv x + 2y + 3z = p$

$$d(\pi, \pi_p) = d(0, \pi_p) = \frac{|p|}{\sqrt{14}}$$

EJERCICIO 2.16. Hallar razonadamente para qué valores de a y b la recta $x + 1 = y = z/a$ y el plano $x - 3y + 2z + b = 0$, son: a) coincidentes, b) paralelos y c) se cortan en un punto. ¿Para algún valor de a y b pueden ser perpendiculares? Justifica la respuesta.

SOLUCION. De la ecuación continua $x + 1 = y = z/a$ de la recta r tenemos que $\vec{r} = (1, 1, a)$ es un vector director, y $R(-1, 0, 0)$ un punto de r.

Si llamamos π al plano de ecuación $x - 3y + 2z + b = 0$, se tiene que el vector $\vec{r}$ pertenece al plano director de π si, y sólo si, sus componentes satisfacen su ecuación $x - 3y + 2z = 0$, esto es si, y sólo si, $a = 1$. Por consiguiente:

* Si $a \neq 1$, r y π no son paralelos, es decir, r corta a π en un punto.

* Si a = 1, consideremos el punto $R(-1,0,0)$, que pertenecerá al plano π si sus coordenadas satisfacen su ecuación $x - 3y + 2z + b = 0$, y esto sucede cuando $b = 1$. Por tanto:

  Si $b = 1$, r y π son coincidentes.

  Si $b \neq 1$, r y π son paralelos.

El vector $\vec{\pi} = (1, -3, 2)$ es un vector perpendicular al plano π, y para ningún valor de a las componentes de $\vec{r} = (1, 1, a)$ son proporcionales a las de $\vec{\pi}$, luego para ningún valor de a y b es r perpendicular al plano π.

EJERCICIO 2.17. Calcular el valor de a para que las rectas

$$r: \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ x - y - z = a \end{cases}$$

se corten en un punto. Para este valor de a dar la ecuación al plano que contiene a las dos rectas.

SOLUCION. La condición para que las rectas r y s corten en un punto es que el sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones sea compatible determinado.

Puesto que la matriz de coeficiente, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, tiene rango 3, la condición será que sea también 3 el rango de la matriz ampliada, lo que equivale a que su determinante sea cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} = -11a = 0 \rightarrow a = 0$$

Otro procedimiento: A partir de las ecuaciones implícitas de r y s calculamos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases},$$

despejando x e y en función de z obtenemos

$$x = \frac{-3 + 5z}{7} \quad ; \quad y = \frac{9 - 8z}{7},$$

y dando a z dos valores distintos, por ejemplo, $z = 0$ y $z = 1$, obtenemos dos puntos,

$$R\left(-\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, 0\right) \quad \text{y} \quad R'\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 1\right),$$

de la recta r, y como

$$\overline{RR'} = \left(\frac{7}{5}, -\frac{8}{7}, 1\right) = \frac{1}{7}(5, -8, 7),$$

podemos tomar el vector $\vec{r} = (5, -8, 7)$ como vector director de r.

Procediendo análogamente con las ecuaciones implícitas de s, se tienen $S(1 - a, 1 - 2a, 0)$, un punto de s, y $\vec{s} = (0, -1, 1)$ un vector director.

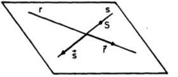
Puesto que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son proporcionales, las rectas r y s no son paralelas, y la condición para que se corten en un punto es que:

$$\text{Rango}\ (\vec{r}, \vec{s}, \overline{RS}) = 2 \rightarrow 0 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & \frac{10}{7} - a \\ -8 & -1 & -\frac{2}{7} - 2a \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{67}{7}a$$

luego el valor buscado de a es $a = 0$.

Este último método nos proporciona puntos y vectores directores de las rectas, y como una determinación lineal del plano determinado por ellas es $(S; \vec{r}, \vec{s})$, la ecuación de dicho plano es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 5 & 0 \\ y - 1 & -8 & -1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 5y + 5z = 6.$$



La ecuación del plano que contiene a las rectas secantes r y s podíamos haberla calculado también eligiendo de entre los planos que pasan por la recta r aquel que además pasa por el punto $S(1, 1, 0)$ de s.

$$\alpha(3x + y - z) + \beta(-x + 2y + 3z - 3) = 0,$$

es la ecuación general de los planos que contienen a la recta r (haz de planos que pasan por r). Buscamos α y β con la condición de que $S(1, 1, 0)$ sea un punto del plano y, para ello, debe ser:

$$\alpha(3 \cdot 1 + 1 - 0) + \beta(-1 + 2 + 0 - 3) = 0$$

de donde se tiene $\beta = 2\alpha$. Si tomamos $\alpha = 1$, $\beta = 2$, obtenemos:

$$x + 5y + 5z - 6 = 0$$

EJERCICIO 2.18. Calcular la distancia del eje OX a la recta de ecuación

$$\mathbf{x = 2y + 2 = 3z - 3.}$$

SOLUCION. Si la ecuación dada la escribimos

$$x = \frac{y + 1}{1/2} = \frac{z - 1}{1/3},$$

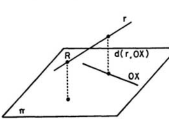
tenemos que $R(0, -1, 1)$ es un punto y $\vec{r} = (1, 1/2, 1/3)$ un vector director.

$\vec{u} = (1, 0, 0)$ es un vector director del eje OX, y el origen $0(0, 0, 0)$ un punto, y puesto que $\text{Rango}(\vec{u}, \vec{r}, \overrightarrow{OR}) = 3$, el eje OX y la recta r se cruzan en el espacio.

Para hallar la distancia (mínima distancia) entre r y el eje OX, calculemos el plano π que contiene el eje OX y es paralelo a r, y la distancia del punto R de r a dicho plano, que coincide con la distancia pedida.

$(0, \vec{u}, \vec{r})$ es una determinación lineal del plano π, y su ecuación es entonces:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1/2 \\ z & 0 & 13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2y - 3z = 0$$



$$d(r, OX) = d(R, \pi) = \frac{|-2 - 3|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \text{ unidades.}$$

Otro procedimiento: Utilizando la fórmula

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{r}, \vec{s}, \overline{RS}]|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|},$$

que da la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan, r y s, donde $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de r y s, respectivamente, y $\overline{RS}$ el vector definido por un punto R de r y uno S de s, obtendremos:

$$\vec{r} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} \rightarrow |\vec{r} \wedge \vec{u}| = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$[\vec{r}, \vec{u}, \overline{OR}] = \overline{OR} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{u}) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$$

$$d(r, OX) = \frac{|[\vec{r}, \vec{u}, \overline{OR}]|}{|\vec{r} \wedge \vec{u}|} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

EJERCICIO 2.19. Ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 1, 1), se apoya en el eje OX y es paralela al plano x − 2y − z = 0.

SOLUCION. El problema se reduce a buscar un punto X(a, 0, 0) del eje OX, tal que el vector $\overline{PX} = (a-1, -1, -1)$ sea paralelo al plano π: $x - 2y - z = 0$.

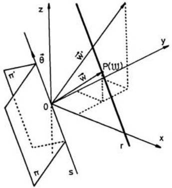
Para ello debe ser $a - 1 + 2 + 1 = 0$, de donde $a = -2$, y la recta pedida es la que pasa por los puntos P(1, 1, 1) y X(−2, 0, 0), cuya ecuación continua es

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

EJERCICIO 2.20 Ecuaciones de la recta r que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es paralela a los planos: $\pi: x + y + z = 0$ y $\pi': x + 2y + 3z = 0$.

SOLUCION. El vector asociado (perpendicular) a π es $\vec{w} = (1, 1, 1)$. El vector asociado (perpendicular) a π' es $\vec{w}' = (1, 2, 3)$. El vector

$$\vec{\theta} = \vec{w} \wedge \vec{w}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$$



es decir $\vec{\theta} = (1, -2, 1)$. Este vector $\vec{\theta}$ puede ser el asociado a la recta s, intersección de π y π'.

La recta pedida r debe ser paralela a π y a π', luego debe ser paralela a s y el vector $\vec{\theta}$ puede ser, también, el asociado a r. Además, r pasa por $P = (1, 1, 1)$. Por tanto, las ecuaciones de la recta pedida r, en forma continua son:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

EJERCICIO 2.21. En el espacio R^3 se dan las rectas r y r' de ecuaciones:

$$r\begin{Bmatrix} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{Bmatrix} \qquad r'\begin{Bmatrix} x = z + 6 \\ y = 2z + 7 \end{Bmatrix}$$

Se pide determinar si son o no coplanarias y, en su caso, hallar el punto de intersección de ambas.

SOLUCION. Las ecuaciones de r y r' se pueden escribir

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$$

$$r': \frac{x-6}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{1}$$

Luego no son paralelas pues:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{1}{1}$$

Por tanto, r y r′ serán coplanarias si se cortan, lo cual exige que el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ x - \ z = 6 \\ y - 2z = 7 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sea compatible determinado, es decir que sea nulo Δ siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Desarrollado Δ queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Las coordenadas del punto común a r y r′ se otienen resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ x - z = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 11 \\ y = 17 \\ z = \ 5 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 2.22. Hallar la ecuación de un plano π que pasa por la recta s de ecuaciones $s\left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}\right\}$ y contiene a la recta r de ecuaciones $r\left\{\begin{array}{l} x = 3z + 1 \\ y = -z - 1 \end{array}\right\}$.

SOLUCION. Las ecuaciones de s y r se pueden escribir así:

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \qquad r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Luego s y r no son paralelas. Por tanto, el plano π pedido que pasa por s y r sólo existe si s y r se cortan en un punto. Entonces π es el plano determinado por esas rectas secantes.

Para que s y r sean secantes, el sistema de sus ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - 3z = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

debe ser compatible y determinado. Esto exige que Δ sea nulo, siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando Δ queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Las coordenadas del punto común a s y r se obtienen resolviendo el sistema

$$\left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - 3z = 1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{vector dirección de (asociado a) la recta s} \rightarrow \vec{u} = (1, 1, 1) \\ \text{vector dirección de (asociado a) la recta r} \rightarrow \vec{w} = (3, -1, 1) \end{array}\right\}$$

Ecuación del plano π determinado por s y r

$$\begin{vmatrix} x + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{2} & z + \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea} \quad \begin{vmatrix} 2x + 1 & 2y + 1 & 2z + 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

operando queda: $\pi : x + y - 2z = 0$.

EJERCICIO 2.23. Hallar las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P = (1, -2, 3)$ y es paralela a la recta $r' \begin{Bmatrix} x = 3z + 2 \\ y = 4 \end{Bmatrix}$.

SOLUCION. Las ecuaciones de la recta r′ se puede escribir así:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{0} = \frac{z}{1}$$

luego el vector de dirección de r′ es $\vec{v} = (3, 0, 1)$.

Este vector $\vec{v}$ puede ser asociado a r por ser r y r′ paralelas.

Por tanto las ecuaciones en forma continua de r son:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{1} \quad \text{es decir}$$

$$\begin{Bmatrix} x - 1 = 3z - 9 \\ y + 2 = 0 \end{Bmatrix} \quad \text{o también} \quad \begin{Bmatrix} x = 3z - 8 \\ y = -2 \end{Bmatrix}$$

EJERCICIO 2.24. Ecuación del plano que pasa por el punto (1, 0, 0) y contiene a la recta r dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{Bmatrix} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{Bmatrix}$$

SOLUCION. Las ecuaciones de r eliminando el parámetro λ son

$$\begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Los planos que contiene a la recta r tienen su ecuación de la forma:

$$(3x + y - 9) + \lambda(2x - z) = 0 \qquad (1)$$

El plano pedido pasa por el punto (1, 0, 0), luego debe ser:

$$(3(1) + 0 - 9) + \lambda(2(1) - 0) = 0 \to \lambda = 3.$$

Sustituyendo en (1) es:

$$(3x + y - 9) + 3(2x - z) = o \quad \text{o sea:} \quad 9x + y - 3z + 9 = 0$$

es la ecuación del plano pedido.

EJERCICIO 2.25. Calcular la ecuación del plano (o planos) que contienen al eje OX y distan 6 unidades del punto P = (0, 10, 0).

SOLUCION. Un plano π que pasa por el eje OX tiene una ecuación de la forma: $By + Cz = 0$. Por tanto, la distancia de $P = (0, 10, 0)$ a ese plano π debe ser:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{B(10) + C(0)}{\sqrt{B^2 + C^2}} \right| = 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 10B = 6\sqrt{B^2 + C^2} \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} B = 3 \\ C = 4 \end{array} \right\} \\ -10B = 6\sqrt{B^2 + C^2} \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} B = -3 \\ C = 4 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

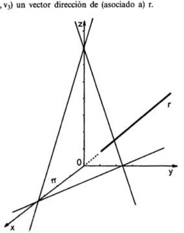
Soluciones: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Plano de ecuación: } 3y + 4z = 0 \\ \text{Plano de ecuación: } -3y + 4z = 0 \end{array} \right\}$.

EJERCICIO 2.26. Ecuaciones de la recta que pasa por el punto (0, 0, 0) y es perpendicular al plano 2x + 3y + z − 7 = 0, razonando la respuesta.

SOLUCION. Las ecuaciones en forma continua de la recta pedida r, por pasar por el punto (0, 0, 0), son:

$$\frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$$

siendo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector dirección de (asociado a) r.



El plano dado π tiene la ecuación: $2x + 3y + z - 7 = 0$, luego un vector asociado (perpendicular) a π es:

$$\vec{w} = (2, 3, 1)$$

Como $r \perp \pi$, puede ser $\vec{v} = \vec{w}$, luego:

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_2 = 3 \quad ; \quad v_3 = 1$$

Por tanto las ecuaciones en forma continua de r son:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

EJERCICIO 2.27. Dadas las rectas r_a y r_b de ecuaciones

$$r_a = \begin{cases} x = az + 2 \\ y = z - 3 \end{cases} \quad ; \quad r_b = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = \frac{z}{1} \right\},$$

se pide:

1.º) **Determinar a y b para que sean ortogonales y coplanarias.**
2.º) **Para estos valores de a y b hallar las coordenadas del punto común y la ecuación del plano que contiene a dichas rectas.**

SOLUCION. 1.º) Las ecuaciones de r_a se pueden escribir:

$$r_a = \frac{x-2}{a} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$$

Por tanto r_a y r_b serán ortogonales si:

$$2a + b + 1 = 0 \qquad (1)$$

Para ser coplanarias, debe ser compatible y determinado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x - az = 2 \\ y - z = -3 \\ x - 2z = 1 \\ y - bz = -1 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

lo cual exige que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -b & -1 \end{vmatrix}$ sea nulo.

Desarrollando Δ queda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & -1 \\ 1-b & 2 \end{vmatrix}$$

Para que $\Delta = 0$ debe ser:

$$2(a-2) + (1-b) = 0 \;\Rightarrow\; 2a - b = 3 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (1) y (3)

$$\left.\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 2a - b = 3 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \left.\begin{matrix} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{matrix}\right\}$$

2.º) Las coordenadas del punto común de r_a y r_b se obtienen resolviendo el sistema de 3 ecuaciones del (2):

$$\left.\begin{cases} y - z = -3 \\ x - 2z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases}\right\} \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{-7}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$$

El vector $\vec{v}$ asociado a r_a es: $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$ o también $(1, 2, 2)$.

El vector $\vec{w}$ asociado a r_b es: $\vec{w} = (2, -2, 1)$.

Por tanto, la ecuación del plano que contiene a r_a y r_b es:

$$\begin{vmatrix} x - \dfrac{7}{3} & y + \dfrac{7}{3} & z - \dfrac{2}{3} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea} \quad \begin{vmatrix} 3x - 7 & 3y + 7 & 3z - 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, se otiene:

$$2x + y - 2z - 1 = 0$$

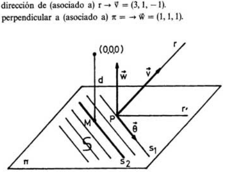
EJERCICIO 2.28. Determinar el conjunto S de rectas que contenidas en el plano π de ecuación $x + y + z + 1 = 0$ sean perpendiculares a la recta de ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + 3t \quad ; \quad y = 2 + t \quad ; \quad z = -t$$

y hallar la recta de S cuya distancia al punto (0, 0, 0) sea mínima.

SOLUCION:

Vector dirección de (asociado a) $r \rightarrow \vec{v} = (3, 1, -1)$.
Vector perpendicular a (asociado a) $\pi = \rightarrow \vec{w} = (1, 1, 1)$.



Punto P de intersección de r con π. Se resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -t \\ x + y + z + 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Resulta $P = \left(-3, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad (2).$

La recta s_1 del conjunto S, que pasa por P tiene sus ecuaciones continuas de la forma:

$$(3) \qquad \frac{x+3}{m} = \frac{y - 2/3}{n} = \frac{z - 4/3}{p}$$

siendo $\vec{\theta} = (m\,n, p)$ un vector dirección de s_1. Debe verificarse:

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; 3m + n - p = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; m + n + p = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases} m = p \\ n = -2p \end{cases}.$$

Sustituyendo en (3) y simplificando por p queda

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2/3}{-2} = \frac{z+4/3}{1} \qquad (4)$$

Ecuaciones continuas de s_1. El conjunto S de rectas contenidas en π, perpendiculares a r tienen las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{-2} = \dfrac{z-z_0}{1} \\ x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \end{array} \right\} \quad (5) \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 2x + y = 2x_o + y_0 \\ y + 2z = y_0 + 2z_0 \end{cases} \quad (6)$$

La recta s_2 de S, cuya distancia al punto (0, 0, 0) es mínima, pasa por el punto M intersección de la perpendicular por (0, 0, 0) a π. Esa perpendicular tiene de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación de π es:

$$t + t + t + 1 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{1}{3}$$

Por tanto

$$M = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \qquad (7)$$

Las ecuaciones de s_2 son:

$$\frac{x+1/3}{1} = \frac{y+1/3}{-2} = \frac{z+1/3}{1} \qquad (8)$$

EJERCICIO 2.29 Hallar las ecuaciones de la recta r, contenida en el plano

$$\pi : x + y - 2z = 0$$

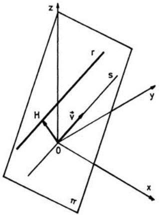
que es paralela a la recta

$$s : \left\{\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}\right\}$$

y tal que la distancia del punto (0, 0, 0) a ella es $\sqrt{72}$.

SOLUCION. Sea H = (m, n, p) el punto de r, pie de la perpendicular trazada en π por 0 a r. Las ecuaciones de r, en forma continua, por ser paralela a s, serán:

$$\frac{x - m}{1} = \frac{y - n}{1} = \frac{z - p}{1}$$



Como H pertenece a π es: $m + n - 2p = 0$ (1).
Como $\overline{OH}$ es perpendicular a $\vec{v} = (1, 1, 1)$ vector dirección de s, es:

$$m \cdot 1 + n \cdot 1 + p \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

y como

$$d(0, r) = |\overline{OH}| = \sqrt{72} \quad \text{es:} \quad \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \sqrt{72} \qquad (3)$$

El sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) es:

$$\left\{\begin{array}{r} m + n - 2p = 0 \\ m + n + p = 0 \\ m^2 + n^2 + p^2 = 72 \end{array}\right\}$$

resuelto da 2 soluciones

$$\left\{\begin{array}{l} m = 6 \\ n = -6 \\ p = 0 \end{array}\right\} \quad y \quad \left\{\begin{array}{l} m = -6 \\ n = 6 \\ p = 0 \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 2.30. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbf{R} \qquad s \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 7 + 6\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

SOLUCION. Las ecuaciones de las rectas r y s, en forma continua, son:

$$r = \left\{\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}\right\} \qquad s = \left\{\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-7}{6}\right\}$$

Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v} = (1, -1, 3) \text{ es un vector dirección r} \\ \vec{w} = (2, -2, 6) \text{ es un vector dirección de s} \end{array}\right\}$$

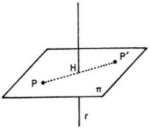
como $\vec{w} = 2\vec{v}$ las rectas r y s son paralelas.

EJERCICIO 2.31 Encontrar las coordenadas del punto P′ simétrico del $P = (2, 0, 3)$ respecto a la recta r de ecuaciones

$$r = \left\{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}\right\}$$

SOLUCION. Se traza el plano π perpendicular por P a r:
Su ecuación es

$$\pi: 1(x - 2) + 1(y - 0) + 2(z - 3) = 0$$



o sea

$$x + y + 2z - 8 = 0$$

Se halla $H(x_0, y_0, z_0)$ intersección de r con π resolviendo el sistema de sus ecuaciones

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2} = t \\ x + y + 2z - 8 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$x = 1 + t \quad ; \quad y = 2 + t \quad ; \quad z = 1 + 2t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1 + t) + (2 + t) + 2(1 + 2t) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_0 = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \\ z_0 = 1 + \dfrac{2}{2} = 2 \end{matrix}\right\}$$

Como $H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ es el punto medio de $\overline{PP'}$, siendo $P' = (x, y, z)$ el punto buscado P', verifica:

$$\frac{3}{2} = \frac{2 + x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad ; \quad \frac{5}{2} = \frac{0 + y}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 5 \quad ; \quad 2 = \frac{3 + z}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 1$$

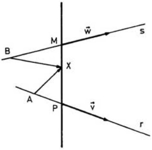
$P' = (1, 5, 1)$.

EJERCICIO 2.32. Ecuaciones de la perpendicular común a las rectas

$$r\begin{Bmatrix} x = 3y \\ z = 0 \end{Bmatrix} \quad y \quad s\begin{Bmatrix} y = 3x \\ z = 3 \end{Bmatrix}$$

Perpendicular común significa perpendicular a r y a s, que corta a r y a s.

SOLUCION. En general la figura es de la forma:



Supongamos el problema resuelto y sea PM la recta pedida, P punto de intersección con r y M punto de intersección con s.

Sea $X = (x, y, z)$ un punto cualquiera de dicha recta. Se puede escribir

$$\begin{cases} r = \left\{\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}\right. \\ s = \left\{\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-3}{0}\right. \end{cases}$$

Se verifica $\left\{\begin{array}{l} \text{El punto } A = (0, 0, 0) \text{ pertenece a r pues } \left\{\dfrac{0}{3} = \dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{0}\right\} \\ \vec{v} = (3, 1, 0) \text{ es el vector dirección de r} \end{array}\right\}$

también es $\left\{\begin{array}{l} \text{El punto } B = (0, 0, 3) \text{ pertenece a S pues } \left\{\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{3} = \dfrac{3-3}{0}\right\} \\ \vec{w} = (1, 3, 0) \text{ es el vector dirección de s} \end{array}\right\}$

Por ser PM perpendicular a r y a s el vector dirección de PM puede ser

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 8\vec{k}$$

es decir (0, 0, 8) o también (0, 0, 1).

$$\text{Los vectores} \quad \left.\begin{array}{l} \overline{AX} \\ \vec{v} \\ \text{vector dirección de PM} \end{array}\right\} \text{son coplanarios luego}$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea} \quad x - 3y = 0 \quad (1)$$

Análogamente.

$$\text{Los vectores} \quad \left.\begin{array}{l} \overline{BX} \\ \vec{w} \\ \text{vector dirección de PM} \end{array}\right\} \text{son coplanarios luego}$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea} \quad 3x - y = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones de la recta pedida PM, son

$$\left\{\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{o sea} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Eje Z'Z}$$

Nota: En este caso $A \equiv P$ y $B \equiv M$.

EJERCICIO 2.33. Para cada λ real se considera el plano π_λ de ecuación:

$$(1 + 3\lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 + 2\lambda)z - 1 + 2\lambda = 0.$$

Se pide:

1.º) Demostrar que todos los planos π_λ pasan por una recta r.

2.º) Hallar la condición que debe cumplir a para que las rectas r y r' de ecuaciones:

$$\frac{x - a}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{3}$$

no sean coplanarias.

3.°) Hallar a para que la distancia entre las rectas r y r′ sea $\dfrac{4}{\sqrt{35}}$.

SOLUCION. 1.°) La ecuación dada se puede escribir en la forma:

$$(x + y + z - 1) + \lambda(3x - y + 2z + 2) = 0 \quad (1).$$

Corresponde al haz de planos de base la recta

$$r\begin{cases} x + y + \ z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Por tanto, para cada valor real de λ se obtiene un plano del haz, es decir, un plano que pasa por r, pues las infinitas soluciones de (2) (que son los puntos de r) verifican a (1) cualquiera que sea λ.

2.°) Vector asociado a $r \rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \rightarrow \vec{v} = (3, 1, -4).$

Vector asociado a $r' \rightarrow \vec{w} = (1, 2, 3)$. Por tanto, r y r′ no son paralelas. Ahora r y r′ no seran coplanarias si el sistema de sus ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ \frac{x - a}{1} = \frac{y + 1}{2} &= \frac{z - 2}{3} \end{aligned} \right\}$$

o su equivalente

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ 3x - z &= 3a - 2 \\ 3y - 2z &= -7 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

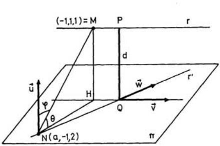
es incompatible. Lo que exige que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 3a - 2 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Desarrollando Δ queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3a \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 11a + 42 \neq 0$$

3.º) La figura, en general, de dos rectas $\left\{\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$ que se cruzan, es la de la forma adjunta:



La distancia $d(r, r')$ en valor absoluto es $|\overline{PQ}| = |\overline{MH}|$.

Siendo M un punto de r, por ejemplo $M = (-1, 1, 1)$; N es otro punto cualquiera de r', por ejemplo: $N = (a, -1, 2)$: π el plano que pasa por r' y es paralelo a r y H pie de la perpendicular por M a π. Se verifica:

$$d = |\overline{MH}| = |\overline{MN}| \operatorname{sen} \theta = |\overline{MN}| \cos \varphi \quad (4) \qquad y \quad \overline{MN} = (a + 1, -2, 1)$$

Consideremos ahora los vectores $\left\{\begin{matrix} \vec{v} = (3, 1, -4) \\ \vec{w} = (1, 2, 3) \end{matrix}\right\}$ direcciones de $\left\{\begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}\right\}$.

El vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}$ aplicado en N es perpendicular a π y es unitario. Sus componentes son

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 13\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Por tanto,

$$\vec{u} = \left(\frac{11}{\sqrt{315}}, \frac{-13}{\sqrt{315}}, \frac{5}{\sqrt{315}}\right) \quad ; \quad |\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{11^2 + (-13)^2 + 5^2} = \sqrt{315}.$$

La fórmula (4) se puede escribir:

$$d = |\overline{MN}|\,|\vec{u}| \cos\varphi = |\overline{MN} \cdot \vec{u}| = \left|(a+1)\cdot\frac{11}{\sqrt{315}} + \frac{26}{\sqrt{315}} + \frac{5}{\sqrt{315}}\right| = \frac{4}{\sqrt{35}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11a + 42 = 12 \Rightarrow \quad a = \frac{-30}{11}$$

También puede ser:

$$-11a - 42 = 12 \Rightarrow \quad a = \frac{-54}{11}$$

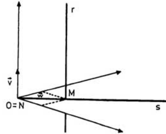
EJERCICIO 2.34 Calcular la distancia entre las rectas:

$$r = \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{Bmatrix} \quad y \quad s = \begin{Bmatrix} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{Bmatrix}$$

SOLUCION. Las ecuaciones continuas son

$$v = \left\{\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1} = t\right\} \qquad s = \left\{\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} = t\right\}$$

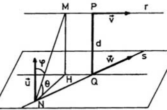
r pasa por el punto $M = (1, 1, 0)$ y tiene a $\vec{v} = (0, 0, 1)$ como vector dirección.
s pasa por el punto $N = (0, 0, 0)$ y tiene a $\vec{w} = (1, 1, 0)$ como vector dirección.
Sus representaciones cartesianas son las rectas de la figura. El sistema de sus



ecuaciones es compatible. Se cortan en un punto. En $M = (1, 1, 0)$.
Por tanto la distancia pedida es: $d(r, s) = 0$.

Otro método

Admitamos que r y s se cruzan.
En general, 2 rectas que se cruzan, presentan la forma, se verifica:



$$d(r, s) = |\overline{PQ}| = |\overline{MH}| = |\overline{NM}| \operatorname{sen} \theta =$$

$$= |\overline{NM}| \cos \varphi = |\overline{NM}| \cdot 1 \cdot \cos \varphi =$$

$$= |\overline{NM} \cdot 1 \cdot \cos \varphi| = ||\overline{NM}| \cdot |\vec{u}| \cos \varphi| =$$

$$= |\overline{NM} \cdot \vec{u}| = \left| \frac{\overline{NM} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|} \right| = \left| \frac{[\overline{NM}, \vec{v}, \vec{w}]}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|} \right|$$

siendo

$$\vec{u} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}$$

En este caso es:

$$N \equiv 0 = (0, 0, 0) \quad ; \quad M = (1, 1, 0) \quad ; \quad \vec{v} = (0, 0, 1) \quad ; \quad \vec{w} = (1, 1, 0) \quad ;$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$$

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = 1 \quad \text{y} \quad [\overline{NM}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Por tanto:

$$d(r, s) = \left|\frac{0}{1}\right| = 0$$

Las rectas no se cruzan, ni son paralelas, ni coinciden. Se cortan.

EJERCICIO. 2.35. Hallar sobre la recta r definida por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$, los puntos cuya distancia al punto $C(1, -2, -3)$ sea $\sqrt{35}$.

SOLUCION. Ecuaciones continuas de

$$r: \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{2-1}{3-1} \Rightarrow x + 1 = y = z - 1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = y - 1 \\ z = y + 1 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

d = Distancia de $(1, -2, -3)$ a los 2 puntos buscados de r tal que: $d = \sqrt{35}$.
Se verifica:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 35 \quad (2)$$

siendo (x, y, z) soluciones de (1). Sustituyendo (1) en (2) queda:

$$(y-2)^2 + (y+2)^2 + (y+4)^2 = 35 \Rightarrow$$

$$3y^2 + 8y - 11 = 0 \left\{\begin{array}{lll} y = 1 & \Rightarrow & x = 0, \ z = 2 \\ y = \dfrac{-11}{3} & \Rightarrow & x = -\dfrac{14}{3}, \ z = -\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

1.^{er} punto: $(0, 1, 2)$; 2.° punto: $\left(\frac{-14}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{-8}{3}\right)$.

Comentario:

En general, si dada una recta r y un punto C, queremos hallar los puntos de r que distan d unidades del punto C, tendremos que puesto que los puntos que están a distancia d de C son los de la esfera de centro C y radio d, los puntos buscados son los de intersección de r con dicha esfera. Por consiguiente:

1.°) Si la distancia de C a r es menor que d, la recta r corta a la esfera en dos puntos y el problema tiene dos soluciones.

2.°) Si la distancia de C a r es igual a d, la recta r es tangente a la esfera, y el problema tiene una solución.

3.º) Si la distancia de C a r es mayor que d, la recta r es exterior a la esfera, y el problema no tiene solución.

En nuestro caso $d(C, r) = \frac{2}{3}\sqrt{42} < \sqrt{35} = d$, luego hay dos puntos solución, que son los obtenidos.

EJERCICIO 2.36. Calcular la distancia del punto $P = (1, 3, -1)$ a la recta

$$r\left\{\begin{matrix} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}.$$

SOLUCION. Las ecuaciones de r se pueden escribir $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ luego el vector asociado (paralelo) a r es $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

Tracemos por P el plano π perpendicular a r. Su vector asociado (perpendicular) a π puede ser $\vec{v} = (1, 1, 2)$.

la ecuación del plano π sera: $1(x - 1) + 1(y - 3) + 2(z + 1) = 0$ o sea $x + y + 2z - 2 = 0$.

Determinemos M punto de intersección de r y π. Sus coordenadas son las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{matrix} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{es decir,} \quad M = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

La distancia pedida es la longitud del segmento MP.

$$d = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{93}}{3}.$$

EJERCICIO 2.37. Calcular la ecuación del plano π, perpendicular a la recta

$$r: x = y - 3 = 2x + 7$$

que corta al eje OY en el punto P de ordenada -7.

SOLUCION. Las ecuaciones de la recta r, en forma continua son:

$$\frac{x - 7}{2} = \frac{y - 10}{2} = \frac{z}{1}$$

Luego el vector dirección de r es $\vec{v} = (2, 2, 1)$. Este vector $\vec{v}$ puede ser el vector asociado (perpendicular) al plano π, ya que π es perpendicular a r. Además, π corta al eje OY en el punto P de ordenada -7, luego pasa por el punto $P = (0, -7, 0)$.

Por tanto la ecuación del plano pedido π es:

$$2(x - 0) + 2(y + 7) + 1(z - 0) = 0 \quad \text{o sea} \quad 2x + 2y + z + 14 = 0.$$

EJERCICIO 2.38. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son:

$$\mathbf{A = (1, 0, 0) \quad ; \quad B = (2, 2, -4)}$$

y C es el punto de intersección de la recta:

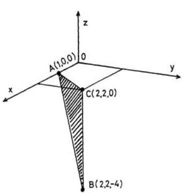
$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{-1}$$

con el plano XOY.

SOLUCION. Las coordenadas de C son las soluciones del sistema.

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{-1} \\ z = 0 \end{array}\right\}, \text{ es decir, de } \left\{\begin{array}{r} x - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C = (2, 2, 0).$$

Sabemos que: Area $ABC = S = \frac{1}{2}|\overline{CA} \wedge \overline{CB}|$



$$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{80} = 2\sqrt{5} \text{ u.c.}$$

Nota. En la figura se observa que el ABC es rectángulo en C, por tanto:

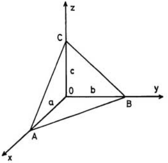
$$\text{Area ABC} = S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2-1)^2 + 2^2 + 0^2} \cdot 4 = 2\sqrt{5} \text{ u.c.}$$

EJERCICIO 2.39. Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto (1, 2, 3), siendo el triángulo formado por las rectas en que corta a los planos coordenados equilátero.

SOLUCION. Sean A(a, 0, 0) y B(0, b, 0) y C(0, 0, c) los puntos en los que el plano pedido corta a los ejes coordenados.

En los triángulos rectángulos OAB, OAC y OBC, se tiene:

$$AB^2 = a^2 + b^2$$
$$AC^2 = a^2 + c^2$$
$$BC^2 = b^2 + c^2$$



y de la condición de ser ABC equilátero, obtenemos:

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = b = c.$$

Como vimos en la cuestión (2.1), la ecuación del plano ABC es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \rightarrow x + y + z = a$$

y puesto que P(1, 2, 3) es un punto de dicho plano, es a = 6, y el plano pedido es

$$x + y + z = 6$$

EJERCICIO 2.40. Dados los vectores

$$\vec{u}_1 = (2, 0, 0), \ \vec{u}_2 = (0, 1, -3) \ \text{y} \ \vec{u}_3 = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2,$$

¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de $\vec{u}_3$ valga la unidad?

SOLUCION. Supondremos que la base en la que están referidos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ es ortonormal.

$$\begin{aligned} |\vec{u}_3|^2 &= \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = (a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2)\cdot(a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2) = \\ &= a^2\,\vec{u}_1^2 + b^2\,\vec{u}_2^2 + 2ab\,\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \end{aligned}$$

Como es $\vec{u}_1^2 = 4$; $\vec{u}_2^2 = 10$; $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, de la condición $|\vec{u}_3| = 1$, obtenemos que:

$$4a^2 + 10b^2 = 1$$

EJERCICIO 2.41. Determinar un punto de la recta

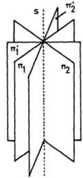
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidiste de los planos $3x + 4y - 1 = 0$, $4x - 3z - 1 = 0$.

SOLUCION. En general, dados dos planos π_1 y π_2 que se cortan en una recta s, el conjunto de puntos que equidistan de π_1 y π_2 son los puntos de los planos π'_1 y π'_2, perpendiculares entre sí, llamados «planos bisectores» de π_1 y π_2.

El problema de encontrar los puntos de una recta r que equidiste de los planos π_1 y π_2, equivale entonces a buscar los puntos en los que r corta a los planos bisectores.

Pueden presentarse los siguientes casos:



1.°) Que r corte en un punto a cada uno de los planos bisectores. En este caso, el problema tiene dos soluciones.

2.°) Que r corte a uno de los planos bisectores en un punto y sea paralela al otro. El problema en este caso tiene solución única.

3.°) Que r coincida con s, o que esté contenida en uno de los planos bisectores. Todos los puntos de r son solución, y el problema tiene infinitas soluciones.

4.°) Que r sea paralela (en sentido estricto) a los dos planos bisectores. El problema entonces no tiene solución.

En el problema que nos ocupa es

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}, \quad \pi_1 \equiv 3x + 4y - 1 = 0,$$

$$\pi_2 \equiv 4x - 3z - 1 = 0.$$

Las ecuaciones paramétricas de r son

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + 3\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}$$

Buscamos, por tanto, puntos de la forma $R(1 + 2\alpha, -1 + 3\alpha, -2 + 2\alpha)$, tales que

$$d(R, \pi_1) = d(R, \pi_2) \quad (1).$$

Recordando que la distancia del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

viene dada por

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

la condición (1), se traduce en:

$$\frac{|3(1 + 2\alpha) + 4(-1 + 3\alpha) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{|4(1 + 2\alpha) - 3(-2 + 2\alpha) - 1|}{\sqrt{25}}$$

que efectuando operaciones resulta:

$$|18\alpha - 2| = |2\alpha + 9|, \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} 18\alpha - 2 = 2\alpha + 9 \\ 18\alpha - 2 = -(2\alpha + 9) \end{cases}$$

Puesto que las dos ecuaciones obtenidas tienen solución, nos encontramos en el primero de los casos de la discusión que hemos hecho al principio del problema. Las soluciones para α son

$$\alpha_1 = \frac{11}{16} \quad y \quad \alpha_2 = -\frac{7}{20},$$

y los puntos pedidos son los de la recta r correspondientes a estos valores del parámetro, resultando:

$$R_1\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, \frac{-5}{8}\right) \quad y \quad R_2\left(\frac{3}{10}, \frac{-41}{20}, \frac{-27}{10}\right)$$

EJERCICIO. 2.42 Dados el plano $2x + y - z = {}^{-}5$ y el punto $P(1, 2, -1)$, se pide:

a) Ecuación de un plano perpendicular al primero y que pase por P.

b) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano dado.

c) ¿Cuántas soluciones tienen las cuestiones a) y b) y qué relación guardan entre ellas?

SOLUCION:

a) Buscamos un plano $Ax + By + Cz = D$, de modo que:

1.º) Pasa por $P(1, 2, -1)$, de donde

$$A + 2B - C = D \quad (1).$$

2.º) Sea perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 5$, o sea

$$2A + B - C = 0 \quad (2).$$

De las relaciones (1) y (2) obtenemos $C = 2A + B$ y $D = B - A$, luego $Ax + By + (2A + B)z = B - A$; es decir,

$$A(x + 2z + 1) + B(y + z - 1) = 0 \qquad (3)$$

es la ecuación general de todos los planos por P perpendiculares al plano π.

b) $\vec{\pi} = (2, 1, -1)$ es un vector normal al plano dado, luego la recta perpendicular a dicho plano y que pasa por P es:

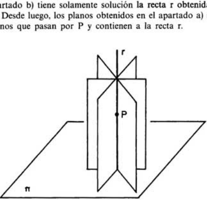
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},$$

cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

c) El apartado a) tiene infinitas soluciones. Todos los planos del haz (3). El apartado b) tiene solamente solución la recta r obtenida.

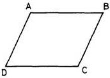
Desde luego, los planos obtenidos en el apartado a) son los del haz de planos que pasan por P y contienen a la recta r.



EJERCICIO 2.43. Justificar que los puntos A(1, 1, 1), B(2, 0, −1), C(5, 2, 1) y D(4, 3, 3) son los vértices consecutivos de un paralelogramo, y obtener la ecuación del plano que lo contiene. Razonar si es o no un rectángulo.

SOLUCION. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo si y sólo si las direcciones de las parejas de vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son las mismas.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2) = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AD} = (3, 2, 2) = \overrightarrow{BC}$$



Luego en efecto, ABCD es un paralelogramo.

($A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$) es una determinación lineal del plano ABCD, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \quad 2x - 8y + 5z + 1 = 0$$

Finalmente, puesto que el producto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 - 2 - 4 = -3 \neq 0$, el ángulo DAB no es recto, y ABCD no es un rectángulo.

Nota: aunque no se advierte en el enunciado, se supone que el sistema de referencia de trabao es ortonormal.

EJERCICIO 2.44. Consideremos el punto P(2, 1, 3) y la recta $r \equiv (x-4)/1 = (y+1)/1 = (z-1)/0$. Obtener la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r. Determinar las coordenadas de dos punto Q y S en r de forma que el triángulo PQS sea equilátero.

SOLUCION. Las ecuaciones paramétricas de la recta r, son

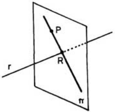
$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1. \end{cases}$$

$\pi \equiv x + y = 3$ es el plano por P perpendicular a r. Cortando r y π obtenemos:

$$(4 + \lambda) + (-1 + \lambda) = 3 \rightarrow \lambda = 0$$

Esto es, el pie de la perpendicular a r tratada por P es el punto de r correspondiente a $\lambda = 0$, esto es, $R(4, -1, 1)$.

La recta PR es la pedida, y su ecuación es:



$$\overrightarrow{PR} = (2, -2, -2) = 2(1, -1, -1)$$

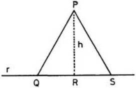
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

Otro procedimiento: Buscamos un punto $R(4 + \lambda, -1 + \lambda, 1)$ de la recta r, de modo que los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\vec{r} = (1, 1, 0)$ sean ortogonales. Para ello, debe ser

$$0 = \overrightarrow{PR} \cdot \vec{r} = (2 + \lambda, -2 + \lambda, -2) \cdot (1, 1, 0) = 2\lambda \rightarrow \lambda = 0$$

El punto $R(4, -1, 1)$ es el buscado, y la recta PR la pedida.

$$h = d(P, R) = 2\sqrt{3}$$



Recordando que en un triángulo equilátero de lado a y altura h es $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tenemos que el lado QS del triángulo PQS es:

$$QS = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$

Los puntos son los de la recta r que distan dos unidades del $R(4, -1, 1)$; esto es, los puntos de la forma $T(4 + \lambda, -1 + \lambda, 1)$ de modo que

$$2 = d(R, T) = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \pm\lambda\sqrt{2}, \quad \text{de donde} \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$$

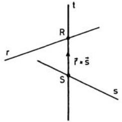
Los puntos pedidos son entonces:

$$Q(4 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1) \quad y \quad S(4 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 1)$$

EJERCICIO 2.45. Explica razonadamente cómo se obtiene la distancia entre dos rectas que se cruzan. Justifica, con o sin cálculo, que la distancia entre las rectas siguientes es 2:

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

SOLUCION. Veamos tres métodos para obtener la distancia entre dos rectas que se cruzan r y s, entendiendo por la distancia entre ellas la menor de las distintas entre un punto de r y uno de s.



Primer método: Sea t la perpendicular común a las rectas r y s, esto es, t es la recta perpendicular a r y a s que corta a las dos. Calculamos los puntos R y S donde t corta a las rectas r y s. La distancia entre las rectas coincide con la distancia entre los puntos R y S.

$$d(r, s) = d(R, S)$$

Si $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores directores de las rectas r y s, la dirección de t es la del vector $\vec{r} \times \vec{s}$. El problema se reduce a buscar un punto R de r y otro S de s, de modo que el vector $\overrightarrow{RS}$ sea paralelo al $\vec{r} \times \vec{s}$.

Ejemplo: Sean las rectas $r \equiv \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-8}{2}$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

$$\vec{r} = (1, -1, 2), \ \vec{s} = (3, -1, 4) \rightarrow \vec{r} \times \vec{s} = (-2, 2, 2) = 2(-1, 1, 1)$$

Los puntos de r son de la forma $R(5 + \lambda, -\lambda, 8 + 2\lambda)$, y los de s de la forma $S(2 + 3\mu, 2 - \mu, -1 + 4\mu)$.

$$\overrightarrow{RS} = (3\mu - \lambda - 3, -\mu + \lambda + 2, 4\mu - 2\lambda - 9)$$

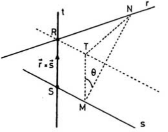
Para que sea paralelo al $\vec{r} \times \vec{s}$, debe ser:

$$\left.\begin{aligned} 3\mu - \lambda - 3 &= \mu - \lambda - 2 \\ 4\mu - 2\mu - 9 &= -\mu + \lambda + 2 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \mu = \frac{1}{2}, \ \lambda = -\frac{17}{6}$$

$$\text{y } \overrightarrow{RS} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}(1, -1, -1)$$

$$d(r, s) = d(R, S) = |\overrightarrow{RS}| = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ unidades}$$

Segundo método: $d = d(R, S)$ es la distancia entre las rectas r y s.



Tomemos un punto M de s y uno N de r. El ángulo θ es el que forman los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\vec{r} \times \vec{s}$.

$$d = |\overrightarrow{MT}| = |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos\theta$$

Entonces:

$$|(\vec{r} \times \vec{s}) \cdot \overrightarrow{MN}| = |\vec{r} \times \vec{s}|\,|\overrightarrow{MN}| \cos\theta = |\vec{r} \times \vec{s}| \cdot d$$

luego la distancia entre las rectas que se cruzan puede calcularse mediante la fórmula:

$$d = d(r, s) = \frac{|[\vec{r},\ \vec{s}, \overrightarrow{MN}]|}{|\vec{r} \times \vec{s}|}$$

donde $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son, respectivamente, vectores directores de r y s, y $\overrightarrow{MN}$ es el vector definido por un punto de s y uno de r, siendo el numerador el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores.

Ejemplo: Consideremos las rectas del ejemplo anterior.

$$\vec{r} = (1, -1, 2) \quad , \quad \vec{s} = (3, -1, 4) \quad , \quad M(2, 2, -1) \quad , \quad N(5, 0, 8)$$

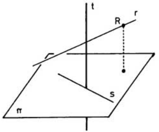
$$\vec{r} \times \vec{s} = 2(-1, 1, 1) \quad , \quad \text{luego} \quad |\vec{r} \times \vec{s}| = 2\sqrt{3}$$

$$[\vec{r},\ \vec{s}, \overrightarrow{MN}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8$$

Apliando la fórmula obtenemos: $d = \dfrac{8}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ unidades.

Tercer método: Calculamos el plano π que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra. La distancia de un punto de ésta al plano π coincide con la distancia entre las rectas r y s.

$$d(r, s) = d(R, \pi)$$



Ejemplo: Para las rectas r y s de los ejemplos anteriores es

$$\vec{r} = (1, -1, 2) \quad , \quad \text{un vector director de r}$$

$$\vec{s} = (3, -1, 4) \quad , \quad \text{un vector director de s}$$

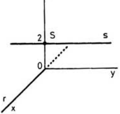
$(S; \vec{r}, \vec{s})$ es una determinación lineal del plano π, donde S es un punto de la recta s. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y - z = 1 \quad ; \quad \text{es la ecuación de } \pi$$

Si tomamos por ejemplo R(5, 0, 8), un punto de la recta r, tenemos:

$$d(r, s) = d(R, \pi) = \frac{|5 - 0 - 8 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ unidades}$$

Para calcular la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ del enunciado, podemos aplicar cualquiera de los métodos descritos, aunque representándolas, sin necesidad de cálculo, se deduce que su distancia es 2, que es la distancia que separa al punto S(0, 0, 2) del origen O.



Capítulo III
CALCULO DIFERENCIAL

CUESTIONES

CUESTION 3.1. Definición de derivada de una función en un punto. Estudiar la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}|x|$ en el punto 0.

SOLUCION. Una función f(x) definida en un entorno (a, b) de un punto x_0, se dice que es derivable en x_0 si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

al valor de dicho límite se le llama derivada de f(x) en el punto x_0, y se representa por $f'(x_0)$.

La existencia del límite anterior equivale a que existan y sean iguales los límites laterales:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y al valor de estos límites se le llama derivadas laterales de f(x) en el punto x_0.

En el caso en que $f(x) = \operatorname{sen}|x|$, tenemos:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = -1 \quad \left(\text{recordando que} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = 1\right)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

La función no es derivable en $x = 0$, pues son distintas las derivadas laterales en este punto.

CUESTION 3.2. Definición de derivada de una función en un punto. Calcular la derivada de $f(x) = x^2 + 2$, en el punto 1 aplicando la definición.

SOLUCION. Una función real $f(x)$ definida en un entorno (a, b) de x_0, se dice que es derivable en el punto x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

El valor del límite se representa por $f'(x_0)$, y recibe el nombre de derivada de $f(x)$ en el punto x_0.

En el caso en que $f(x) = x^2 + 2$ y $x_0 = 1$, tenemos:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$$

CUESTION 3.3. Enunciar y demostrar el teorema de Cauchy. Aplicarlo a las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Se puede deducir de ello que la ecuación

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\pi^2}{4}$$

tiene solución en el intervalo $(0, \pi)$?

SOLUCION. El enunciado del teorema de Cauchy lo hemos dado en la cuestión (3.1), y la demostración puede encontrarse en cualquier libro de texto.

Dado que las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x^2$ son continuas y derivables en toda la recta real, puede aplicárseles el teorema de Cauchy en cualquier intervalo.

Puesto que $g(\pi) \neq g(0)$ y $g'(x) = 2x$ no se anula en $(0, \pi)$, el teorema de Cauchy asegura la existencia de al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) tal que

$$\frac{f(\pi) - f(0)}{g(\pi) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

es decir

$$\frac{\cos \pi - \cos 0}{\pi^2 - 0} = \frac{-\operatorname{sen} c}{2c} \quad ; \quad \frac{-2}{\pi^2} = \frac{-\operatorname{sen} c}{2c}$$

y puesto que la última ecuación equivale a

$$\frac{c}{\operatorname{sen} c} = \frac{\pi^2}{4}$$

está garantizada la existencia de al menos una raíz de la ecuación dada en el intervalo $(0, \pi)$.

CUESTION 3.4. Teorema del valor medio o de Cauchy. Aplicarlo a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

SOLUCION. El teorema del valor medio o de Cauchy dice que si f(x) y g(x) son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el abierto (a, b) entonces existe, al menos, un punto c en (a, b) tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Si $g(b) \neq g(a)$ y, además, la función derivada $g'(x)$ no se anula en el intervalo (a, b), la igualdad anterior podemos escribirla en la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Puesto que las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas y derivables en todo R, se les puede aplicar el teorema de Cauchy en cualquier intervalo. Además,

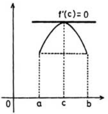
$$\cos 0 \neq \cos \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad g'(x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{no se anula en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

luego existe al menos un punto $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que:

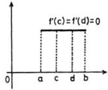
$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0}{\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0} = \frac{\cos c}{-\operatorname{sen} c}, \quad \text{es decir} \quad 1 = \operatorname{tg} c, \quad \text{luego} \quad c = \frac{\pi}{4}$$

CUESTION 3.5. Enunciar y demostrar el teorema de Rolle, aplicándolo, si es posible, a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

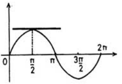
SOLUCION. Sea $f(x)$ una función definida y continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(a) = f(x)$ entonces: Existe, al menos, un punto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.



En efecto: Por el teorema de Weierstrass de las funciones continuas existe un punto $x_1 \in [a, b]$ donde $f(x)$ alcanza el máximo absoluto y otro punto $x_2 \in [a, b]$ donde $f(x)$ alcanza el mínimo absoluto. Si uno de los puntos x_1 o x_2 pertenece a $]a, b[$ a ese punto le llamaremos c y será un extremo relativo (máximo o mínimo) en $]a, b[$. Por lo tanto, $f'(c) = 0$ y $c \in]a, b[$.



Si $x_1 \notin]a, b[$ y $x_2 \notin]a, b[$ el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$ en $[a, b]$ han de coincidir con $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, $f(x)$ es constante $[a, b]$ y $f'(c) = 0$ $\forall c \in]a, b[$.



$f(x) = \operatorname{sen} x$ está definida y es continua en $[0, \pi]$
$f(x) = \operatorname{sen} x$ es derivable en $]0, \pi[$ pues $f'(x) = \cos x$ está definida en $]0, \pi[$.
Existe $\dfrac{\pi}{2} \in]0, \pi[$ tal que $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

CUESTION 3.6. Enunciar el teorema de Rolle y justificar si es, o no, aplicable a la función $f(x) = |x - 7|$ en el intervalo $[4, 8]$.

SOLUCION. El teorema de Rolle dice que si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b), y además $f(a) = f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = |x - 7|$ no toma valores iguales en los extremos del intervalo $[4, 8]$, luego no cumple las hipótesis del teorema.

Aún cumpliéndose la condición anterior, por ejemplo, en el intervalo $[4, 10]$, tampoco le es aplicable el teorema de Rolle, pues, como vamos a ver, f(x) no es derivable en $x = 7$. En efecto:

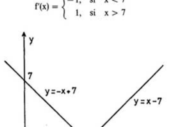
$$f(x) = \begin{cases} -x + 7, & \text{si } x < 7 \\ x - 7, & \text{si } x \geqslant 7 \end{cases}$$

$$f'_-(7) = \lim_{x \to 7^-} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim_{x \to 7^-} \frac{-x + 7}{x - 7} = -1$$

$$f'_+(7) = \lim_{x \to 7^+} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim_{x \to 7^+} \frac{-x + 7}{x - 7} = 1$$

Por tanto, f(x) no es derivable en $x = 7$ pues las derivadas laterales en este punto son distintas. En todos los demás puntos es derivable, siendo la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 7 \\ 1, & \text{si } x > 7 \end{cases}$$



CUESTION 3.7. Enunciar el teorema de Rolle y justificar si es o no aplicable a la función $f(x) = |2x - 1|$ en $[0, 1]$.

SOLUCION. En general, la función $f(x) = |ax - b|$ es continua en toda la recta real, y derivable en todos los puntos a excepción de $x = \frac{b}{a}$, en el que las derivadas laterales no coinciden, ya que es:

$$f(x) = \begin{cases} -ax + b, & \text{si } x < b/a \\ ax - b, & \text{si } x \geqslant b/a \end{cases}$$

y resulta

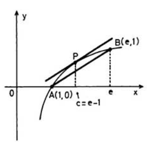
$$f'_-\left(\frac{b}{a}\right) = -a, \quad f'_+\left(\frac{b}{a}\right) = a.$$

En el caso particular de la función $f(x) = |2x - 1|$, se observa que toma valores iguales en los extremos del intervalo $[0, 1]$, pues $f(0) = f(1) = 1$, pero según hemos visto, no es derivable en $x = 1/2$, y, por tanto, no verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$.

CUESTION 3.8. Enunciar el teorema de las incrementos finitos. Aplícalo al siguiente ejercicio. ¿En qué punto P de la gráfica de la función f la recta tangente a dicha gráfica es paralela a la recta que pasa por A y B? A(1, 0) B(e, 1).

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f\colon x \to \ln x$$



SOLUCION. Sea f(x) una función definida y continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Existe, al menos, un punto $c \in]a, b[$ tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

$f(x) = \ln x$ está definida y es continua en R^+ y, por tanto, en $[1, e]$.

$f(x) = \ln x$ es derivable en $]1, e[$ pues $f'(x) = \frac{1}{x}$ está definida para $\forall x \in]1, e[$.

Por tanto existe un $c \in]1, e[$ tal que: $f(e) - f(1) = (e - 1)f'(c)$ de donde:

$$\ln e - \ln 1 = (e - 1)\frac{1}{c} \quad \text{o sea:} \quad \frac{1}{e - 1} = \frac{1}{c} \rightarrow c = e - 1$$

CUESTION 3.9. Teorema de Cauchy: enunciado y demostración. Comprobar si cumplen las condiciones de este teorema las funciones: $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^3 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

SOLUCION. Sean f(x) y g(x) dos funciones definidas y continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Si $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de $]a, b[$ y $g(a) \neq g(b)$ entonces:

Existe, al menos, un punto $c \in]a, b[$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En efecto:

La función $F(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$ cumple las condiciones del teorema de Rolle, puesto que es continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y

$$F(a) = F(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a).$$

Por tanto, existe un punto $c \in]a, b[$ donde $F'(c) = 0$. Entonces

$$g'(c)[f(b) - f(a)] - f'(c)[g(b) - g(a)] = 0$$

o sea:

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Por hipótesis $g(b) - g(a) \neq 0$. Si $g'(c) = 0$ entonces $f'(c) = 0$ lo que contradice la hipótesis. Luego $g'(c) \neq 0$. Dividiendo la última igualdad por el número no nulo $[g(b) - g(a)]g'(c)$, se obtiene:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{siendo} \quad c \in]a, b[.$$

$f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^3 + 1$ están definidas y son continuas en $[0, 3]$. Son también derivables en $]0, 3[$, pues: $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 3x^2$ están definidas para $\forall x \in]0, 3[$.

Además: $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 3x^2$ no se anulan simultáneamente en $]0, 3[$ y $g(0) = 1 \neq g(3) = 28$. Por tanto: $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy. En consecuencia, existe un punto $c \in]0, 3[$, tal que:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{o sea} \quad \frac{12 - 3}{28 - 1} = \frac{2c}{3c^2}$$

de donde:

$$27c = 54 \rightarrow c = 2 \quad (\text{siendo } c \in]0, 3[).$$

CUESTION 3.10. Enunciado y demostración del teorema de Rolle. Deducir de esto que si $f(x)$ es una función real, definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y la derivada no es nula en ningún punto del intervalo (a, b), entonces f es inyectiva. (Recuérdese que f es inyectiva si se cumple que siempre que $x, y \in (a, b)$ con $x \neq y$ se tiene que $f(x) \neq f(y)$).

SOLUCION. El enunciado y demostración del teorema de Rolle son conocidos. Veamos que una función que satisface las condiciones indicadas es inyectiva en el intervalo (a, b), es decir, toma valores distintos en puntos distintos de dicho intervalo. En efecto, supongamos que x, y son dos puntos del intervalo para los cuales $f(x) = f(y)$, siendo $x \neq y$, digamos $x < y$. Puesto que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), cumple las hipótesis del teorema de Rolle en cualquier subintervalo de $[a, b]$ en el que tome valores iguales en los extremos, en particular en el $[x, y]$, lo que garantizaría la existencia de, al menos, una solución de $f'(x) = 0$ en el intervalo (x, y), y esto contradice que la función derivada no se anula en (a, b).

Como aplicación, consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Puesto que $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ para cualquier valor real de x, deducimos que $f(X)$ es inyectiva en toda la recta real.

Esta consecuencia del teorema de Rolle se utiliza frecuentemente para garantizar la unicidad de una raíz x_0 de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$, en el caso en que f sea continua en dicho intervalo y derivable, con derivada no nula, en (a, b).

CUESTION 3.11. Enunciar y demostrar el teorema de Cauchy. Aplicarlo a las funciones e^x y x^3 en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCION. El enunciado del teorema de Cauchy lo hemos dado en la cuestión (3.7), y la demostración corresponde al apartado teórico, y puede encontrarse en cualquier libro de texto.

En el caso de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3$, continuas ambas en el intervalo

[0, 1], y derivables en (0, 1), la aplicación del teorema de Cauchy asegura la existencia de al menos un punto c del intervalo (0, 1) tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \to \frac{e - 1}{1} = \frac{e^c}{3c^2}$$

es decir, el teorema de Cauchy asegura la existencia de al menos una raiz de la ecuación $\frac{e^x}{3x^2} = e - 1$, en el intervalo (a, b).

CUESTION 3.12. Enunciado del teorema del valor medio. Aplicación: Si los valores mínimo y máximo de la derivada de la función f en el intervalo [2, 5], donde es derivable en cada uno de sus puntos, son 7 y 9, respectivamente, justificar cuál o cuáles de las siguientes posibilidades pueden darse:

a) $f(2) = 6$ y $f(5) = 8$
b) $f(2) = 6$ y $f(5) = 30$
c) $f(2) = 6$ y $f(5) = 300$

SOLUCION. El teorema del valor medio afirma que si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), existe entonces un punto c de (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

La aplicación del teorema del valor medio a f(x) en el intervalo [2, 5], nos dice que $f(5) - f(2) = f'(c)(5 - 2)$, para cierto c de (2, 5).

Puesto que $7 \leqslant f'(x) \leqslant 9$, para todo x de (2, 5), se tendrá que

$$21 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 27$$

condición que sólo es satisfecha si se da la posibilidad b).

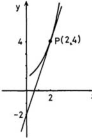
CUESTION 3.13. Significado geométrico de la derivada de una función en un punto. De la función f(x) se sabe que $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$ y $f''(2) > 0$. Representar la tangente a la curva en el punto (2, 4), y dibujar la posición de la curva $y = f(x)$ respecto a la tangente en las proximidades del punto (2, 4), justificando la construcción.

SOLUCION. Si una función f(x) está definida en un entorno de x_0 y es derivable en x_0, la derivada de f(x) en x_0 es la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente en P es entonces $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Si $f(2) = 4$ y $f'((2) = 3$, la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(2, 4)$ tiene pendiente 3, y su ecuación es:

$$y - 4 = 3(x - 2), \quad \text{esto es} \quad 3x - y - 2 = 0$$

Puesto que la derivada en $x = 2$ es positiva, la función es estrictamente creciente en $x = 2$, y al ser también positiva la segunda derivada en $x = 2$, deducimos que en las proximidades del punto $P(2, 4)$ la tangente a la curva en dicho punto está por debajo de la curva. Con esta información podemos decir que la situación en los alrededores de $P(2, 4)$ es:

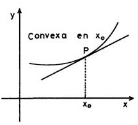


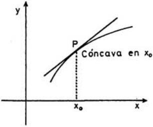
CUESTION 3.14. Definición de concavidad y convexidad de una función en un punto. La derivada de la función f es creciente, siendo negativa si $x < 2$ y positiva si $x > 2$. Justifica que la función f posee un extremo relativo, dibuja aproximadamente la gráfica de la función f, justificando la forma del dibujo y su concavidad y convexidad.

SOLUCION. Una función real $f(x)$ se dice que es convexa en un punto x_0 si en un entorno de dicho punto las ordenadas de los puntos de la curva son mayores que las ordenadas de los puntos de la tangente a la curva en el punto de abscisa x_0, es decir, la tangente a la curva en el punto de abscisa x_0 queda por debajo de la gráfica de la función en las proximidades del punto $P(x_0, f(x_0))$.

Se dice que la función $f(x)$ es cóncava en un punto x_0 si en un entorno de dicho punto las ordenadas de los puntos de la curva son menores que las ordenadas de los puntos de la tangente a la curva en el punto x_0, es decir, la tangente a la curva en el punto $P(x_0, f(x_0))$ queda por encima de la gráfica de la función en las proximidades de P.

Sabemos que si la derivada de una función f es negativa a la izquierda de x_0 y positiva a la derecha, entonces la función tiene en x_0 un mínimo relativo, ya que es

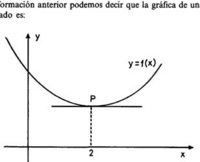




decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha. La función f del enunciado tiene entonces en $x = 2$ un mínimo relativo.

Por otra parte, es conocido que si una función f es derivable en un intervalo I, y f′ es creciente en I, entonces f es convexa en el intervalo I. En particular, si f″ es positiva en I, f es convexa en I. Por consiguiente la función f del enunciado es convexa en toda la recta real.

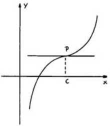
Con la información anterior podemos decir que la gráfica de una función como la del enunciado es:



CUESTION 3.15. Sea f(x) una función definida y continua en el intervalo [a, b] y derivable en el]a, b[. Si $c \in]a, b[$, razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $f'(c) = 0$, entonces f admite máximo o mínimo relativo en c.
b) Si f admite máximo o mínimo relativo en c, entonces $f'(c) = 0$.

SOLUCION. La afirmación del apartado a) es falsa. Una función puede tener en el punto de abscisa o tangente horizontal, sin alcanzarse en éste un máximo o mínimo relativo.



Es conocido que si f es derivable en c y si admite en c un máximo o mínimo relativo, necesariamente ha de ser $f'(c) = 0$. La afirmación del apartado b) es cierta.

En efecto, supongamos que c es un máximo relativo

$$\text{si} \quad h < 0 \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0$$

$$\text{si} \quad h > 0 \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0 \Rightarrow f'_+(c) \leq 0$$

Como f es derivable en c, $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$, luego $f'(c) = 0$. Igualmente demostraríamos que $f'(c) = 0$ en el caso en que c fuese mínimo relativo.

CUESTION 3.16 Enunciar y demostrar el teorema de Rolle. Sabiendo que $\operatorname{tg}(0) = \operatorname{tg}(\pi)$, razonar si es aplicable o no el teorema de Rolle a la función $y = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCION. El teorema de Rolle afirma que si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ para el cual $f'(c) = 0$.

La demostración del teorema es conocida.

No puede aplicarse el teorema de Rolle a la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $[0, \pi]$, ya que es discontinua en $x = \dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, por lo que no cumple la hipótesis de continuidad.

CUESTION 3.17. Enunciar y demostrar el teorema del valor medio. Comprobarlo explícitamente para la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

SOLUCION. El teorema del valor medio afirma que si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ para el cual se cumple que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La demostración de este teorema es conocida, y no es más que la aplicación del teorema de Rolle a la función

$$\Psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad , \quad \text{en el intervalo } [a, b]$$

Si $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$, tenemos $f'(x) = 8x - 5$, y el teorema del valor medio en $[0, 2]$ garantiza la existencia de un punto $c \in (0, 2)$ tal que

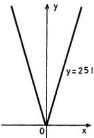
$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 8c - 5 \rightarrow \frac{6}{2} = 8c - 5,$$

de donde $\boxed{c = 1}$

EJERCICIOS

EJERCICIO 3.1. Hallar las derivadas a la derecha e izquierda en el punto 0 de la función $y = 25|x|$ indicando, además, si es derivable en el punto 0. (Nota: $|x|$ indica módulo de x.)

SOLUCION:



$$\left.\begin{aligned} y'_{0^+} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{25|x| - 25|0|}{x - 0} = 25. \\ y'_{0^-} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{25|x| - 25|0|}{x - 0} = -25 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{No es derivable} \\ \text{en el punto } x = 0 \\ \text{por ser } y'_{0^+} \neq y'_{0^-}\end{array}$$

EJERCICIO 3.2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f de R en R definida de la forma:

$$\mathbf{f(x)} \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x < 1 \end{array} \right\}$$

SOLUCION. La función f viene dada por dos ramas. En la 1.ª) es continua en $]1, +\infty[$ por ser función polinómica. En la 2.ª) también es continua en $]-\infty, 1[$ por ser un cociente de funciones polinómicas, cuyo denominador no se anula en el intervalo. Veamos ahora que ocurre en el punto $x = 1$: Calculando los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1.$$

Por tanto, presenta una discontinuidad de 1.ª de salto infinito en $x = 1$. Calculando las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)'_{x=1^-} = \left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)_{x=1^-} = +\infty \\ f'(1^+) = (x^2)'_{x=1^+} = (2x)_{x=1^+} = 2 \end{array}\right\}$$

Como son distintas $f(x)$ no es derivable en el punto $x=1$.

EJERCICIO 3.3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x|.x$ en su campo de definición.

SOLUCION. La función $f(x)$ consta de dos ramas.

$$\text{Para} \begin{cases} x \geqslant 0 \to f(x) = x^2 \\ x < 0 \to f(x) = -x^2 \end{cases}$$

Siendo las dos ramas funciones polinómicas son derivables y continuas en su campo de definición.

Estudiemos las derivadas laterales en el punto $x = 0$. Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h^2}{h} = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto $f'(0)=0$. $f(x)$ es pues derivable y, por tanto, continua en el origen.

EJERCICIO 3.4. Hallar la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geqslant -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

y, si existe, la ecuación de la tangente en el punto -1.

SOLUCION. La función f(x) está definida y es continua en toda la recta real, ya que el único punto que pudiera ofrecer dudas sobre la continuidad es $x = -1$, pero se tiene:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} x^2-2 = -1,$$

por tanto $\lim_{x\to-1} f(x) = -1 = f(-1)$, y f(x) es continua en $x = -1$.

Calculemos la función derivada. Si $x_0 < -1$, en un entorno de x_0 f(x) coincide con la función $g(x) = \frac{1}{x}$, que es derivable en x_0 y $f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$. Si $x_0 > -1$, en un entorno de x_0 f(x) coincide con la función $h(x) = x^2 - 2$ que, como sabemos, es derivable en x_0 y $f'(x_0) = h'(x_0) = 2x_0$.

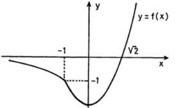
Para averiguar si f(x) es derivable en $x = -1$, calculemos las derivadas laterales en dicho punto.

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x} = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-2+1}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} x-1 = -2$$

como $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, f(x) no es derivable en $x = -1$, y tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > -1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

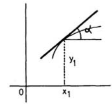


Observando la gráfica de la función f(x) se «detecta» la no derivabilidad en $x = -1$.

La tangente por la izquierda en $x = -1$ es la recta $s \equiv x + y + 2 = 0$, y por la derecha la recta $t \equiv 2x + y + 3 = 0$.

EJERCICIO 3.5. Se considera la curva $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^2 + 3\ln(x + 3)$. Hallar la ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = 0$. Demostrar que la curva tiene otra tangente paralela a la anterior y determinarla.

SOLUCION. Sabemos que: $\operatorname{tg}\alpha = y_1'$. Por tanto: La ecuación de la tangente a una curva $y = f(x)$, en el punto (x_1, y_1) es:



$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

Aquí es:

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{x + 3}.$$

Para $x_1 = 0$ es: $f'(0) = \frac{3}{3} = 1$:

En el punto de abscisa $x_1 = 0$ es:

$$f(0) = 0^2 + 3\ln(0 + 3) = 3\ln 3.$$

Por tanto, la 1.ª tangente pedida es:

$y - 3\ln 3 = 1(x = 0)$, o sea

$$y = x + 3\ln 3.$$

Como $f'(0) = 1$: Igualamos a 1 la función derivada. Será:

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{x + 3} = 1 \quad \text{o sea} \quad 2x^2 + 6x + 3 = x + 3$$

que tiene 2 raíces reales, pues:

$$2x^2 + 5x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 & \text{ya considerada.} \\ x_2 = \dfrac{-5}{2}. \end{cases}$$

En el punto $x_2 = \dfrac{-5}{2}$ la curva dada tiene de pendiente $f'\left(\dfrac{-5}{2}\right) = 1$, es decir, es paralela a la anterior: La ecuación de la tangente es:

$$y - y_2 = f'(x_2)(x - x_2)$$

Para

$$x_2 = \frac{-5}{2} \quad \text{es:} \quad f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{25}{4} + 3 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4} - 3 \ln 2$$

Por tanto, la 2.ª tangente pedida es:

$$y - \left(\frac{25}{4} - 3 \ln 2\right) = 1\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

o sea

$$y = x + \frac{35}{4} - \ln 8$$

EJERCICIO 3.6. ¿Se cumplen las condiciones del teorema de Rolle para la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0, \pi]$?

SOLUCION. Condiciones del Teorema de Rolle:

1.ª) $f(x)$ ha de estar definida y ser continua en $[0, \pi]$.

2.ª) $f(x)$ ha de ser derivable en $]0, \pi[$.

3.ª) Debe ser $f(0) = f(\pi)$.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ no está definida en $x = \dfrac{\pi}{2}$, ni es continua en $x = \dfrac{\pi}{2}$ siendo $\dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in]0, \pi[$.

$\operatorname{tg}(0) = \operatorname{tg} \pi = 0$.
Se cumple la 3.ª) y no se cumplen la 1.ª) y la 2.ª).

EJERCICIO 3.7. Probar que la ecuación $e^x = 1 + x$ no tiene ninguna solución real distinta de 0.

SOLUCION. Formemos la función $F(x) = e^x - 1 - x$. Para $x = 0$ es:

$$F(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$$

Supongamos que existe un valor real $c \neq 0$, tal que: $e^c = 1 + c$ será entonces $F(c) = e^c - 1 - c = 0$. Cumpliendo $F(x)$ todas las condiciones del Teorema de Rolle debe ser $F'(x) = 0$ en un punto $x \in]0, c[$ lo cual es imposible por ser $F'(x) = e^x - 1 \neq 0 \ \forall x \neq 0$.

En consecuencia, no se puede suponer la existencia de un valor real $c \neq 0$, tal que $e^c = 1 + c$.

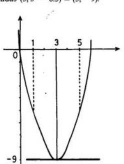
EJERCICIO 3.8. Aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 6x$, escogiendo convenientemente el intervalo [a, b].

SOLUCION. $f(x) = x^2 - 6x$ es una función definida y continua en todo R.

$f(x) = x^2 - 6x$ es también derivable en R, pues $f'(x) = 2x - 6$ está definida en R.

$f(x) = 2x - 6 = 0$ para $x = 3$.

Como $f(x) = x^2 - 6x$ se representa en una parábola de vértice mínimo, ese mínimo tiene de coordenadas $(3, 3^2 - 6.3) = (3, -9)$.



Como extremos a y b del intervalo podemos tomar dos puntos simétricos respecto a 3. Por ejemplo: $a = 1$ y $b = 5$.

$f(x) = x^2 - 6x$ está definida y es continua en $[1, 5]$.

$f(x) = x^2 - 6x$ es derivable en $]1, 5[$: $f'(x) = 2x - 6$.

Existe un punto $3 \in]1, 5[$ tal que $f'(3) = 2(3) - 6 = 0$.

EJERCICIO 3.9. Analizar si el Teorema de Cauchy es aplicable a las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en el intervalo $[1, 4]$ y aplicarlo en su caso.

SOLUCION. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ están definidas y son continuas en $[1, 4]$. También son derivables en $]1, 4[$, pues

$$f'(x) = 2x - 2 \quad y \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$$

están definidas para $\forall x \in]1, 4[$. Además:

$$f'(x) = 2x - 2 \quad y \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$$

no se anulan simultáneamente en $]1, 4[$, pues $g'(x) = 0$ tiene raíces imaginarias. Y

$$g(1) = 9 \neq g(4) = 27.$$

Por tanto, se puede aplicar. Existe $c \in]1, 4[$, tal que:

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20} \quad \text{o sea} \quad \frac{11 - 2}{27 - 2} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$$

de donde:

$c^2 - 6c + 8 = 0$: $c = 2$ ($c = 4 \notin]1, 4[$).

EJERCICIO 3.10. Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange para la función $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$ y hallar el correspondiente valor intermedio.

SOLUCION. Condiciones del Teorema de Lagrange.

1.ª) $f(x)$ ha de estar definida y ser continua en $[-2, 1]$.

2.ª) $f(x)$ ha de ser derivable en $]-2, 1[$.

$f(x) = x - x^3$ está definida en $[-2, 1]$ y es continua en ese intervalo, por ser diferencia de funciones continuas.

$f(x) = x - x^3$ es derivable en $]-2, 1[$, pues $f'(x) = 1 - 3x^2$ está definida en $]-2, 1[$.

Por tanto, existe un punto $c \in]-2, 1[$, tal que:

$$f(1) - f(-2) = (1 + 2)f'(c)$$

de donde:

$$f'(c) = \frac{(1 - 1^3) - (-2 - (-2)^3)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

o sea

$1 - 3c^2 = -2 \to c = -1.$ $(c = 1 \notin]-2, 1[)$.

EJERCICIO 3.11. Verificar el teorema de los incrementos finitos (o de Lagrange) para la función: $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ en el intervalo $]1, 4[$.

SOLUCION:

$f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ está definida y es continua en $[1, 4]$.

$f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ es derivable en $]1, 4[$, pues $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$ está definida en $]1, 4[$.

Por tanto, existe un punto $c \in]1, 4[$, tal que:

$$f(4) - f(1) = (4 - 1)f'(c)$$

de donde:

$$\frac{29}{4} + 1 = 3\left(2 + \frac{3}{c^2}\right)$$

o sea

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{c^2} \to c = 2 \quad (c = -2 \notin]1, 4[)$$

EJERCICIO 3.12. Sea $f(x) = \ln(5 - x^2)$ y el intervalo $[-2, 2]$. ¿Se puede aplicar el teorema de los incrementos finitos (o de Lagrange)? En caso afirmativo, ¿hallar el valor intermedio que cumple el teorema?

SOLUCION. $f(x) = \ln(5 - x^2)$ está definida y es continua en $[-2, 2]$.

$f(x) = \ln(5 - x^2)$ es derivable en $]-2, 2[$, pues $f'(x) = \dfrac{-2x}{5 - x^2}$ está definida en $]-2, 2[$. Si se puede aplicar el Teorema de Lagrange.

Por tanto, existe un punto $c \in]-2, 2[$, tal que:

$$f(2) - f(-2) = (2 + 2)f'(c)$$

de donde:

$$0 - 0 = 4\frac{-2c}{5 - c^2}, \quad \text{o sea:} \quad -8c = 0 \rightarrow c = 0.$$

EJERCICIO 3.13. Dada la parábola de ecuación $y = x^2$ hallar las coordenadas de un punto de la curva cuya tangente en él, sea paralela a la cuerda de extremos (1, 1) y (2, 4). Representar la figura. ¿Tiene algo que ver con algún teorema conocido? En caso afirmativo enúnciese.

SOLUCION. Es la interpretación geométrica del Teorema de Lagrange.

$f(x) = x^2$ está definida y es continua en $[1, 2]$.

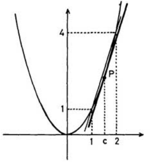
$f(x) = x^2$ es derivable en $]1, 2[$, pues $f'(x) = 2x$ está definida en $]1, 2[$.

Por tanto, existe un $c \in]1, 2[$, tal que:

$$f(2) - f(1) = (2 - 1)f'(c)$$

de donde:

$$4 - 1 = 1 \cdot 2c \rightarrow c = \frac{3}{2}$$



El punto pedido es

$$P = \left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

REGLAS DE L'HÔPITAL

CASO: $\frac{0}{0}$, $f(a) = g(a) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n}(x)}{g^{(n}(x)}$$

$$\text{si } f'(a) = g'(a) = 0 \quad ; \quad f''(a) = g''(a) = 0 \cdots f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1}(a) = 0$$

EJERCICIO 3.14. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

EJERCICIO 3.15. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x \cdot \ln a - b^x \cdot \ln b}{1} = a^0 \cdot \ln a - b^0 \ln b =$$

$$= \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

EJERCICIO 3.16. Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}}{\sqrt{x+4}} = \frac{3}{2}.$$

CASO: $\dfrac{\infty}{\infty}$. Se procede como en el caso $\dfrac{0}{0}$

EJERCICIO 3.17. Calcular: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{3/2}}{6 - x\sqrt{x}}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{3/2}}{6 - x^{3/2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3}{2}x^{1/2}}{0 - \dfrac{3}{2}x^{1/2}} = -1.$$

EJERCICIO 3.18. Calcular: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot \ln x + \dfrac{x}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 1}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{2} = 0.$$

CASO: $0 \cdot \infty \quad = \dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$ y $\infty - \infty$. Se transforma en $\dfrac{0}{0}$. También en $\dfrac{\infty}{\infty}$

EJERCICIO 3.19. **Calcular:** $\lim\limits_{x \to +\infty} x(5^{1/x} - 1)$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to +\infty} x(5^{1/x} - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{1/x} - 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{1/x} \cdot \ln 5\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} 5^{1/x} \cdot \ln 5$$

$$= \ln 5.$$

EJERCICIO 3.20. **Calcular:** $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \dfrac{x + a}{x - a}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to \infty} x \ln \frac{x+a}{x-a} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \dfrac{x+a}{x-a}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x-a}{x+a} \cdot \dfrac{-2a}{(x-a)^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax^2}{x^2 - a^2} = 2a.$$

EJERCICIO 3.21. **Calcular:** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + xe^x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 3.22. **Calcular:** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x - 1) \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1 \cdot \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1}{1 \ln x + \dfrac{x - 1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 3.23. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

SOLUCION:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen} x \cdot \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1} = 1.$$

EJERCICIO 3.24. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{cotg} 2x}{x}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}}{1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

CASOS: $\begin{matrix} \mathbf{0^0} \\ \mathbf{1^\infty} \\ \mathbf{\infty^0} \end{matrix}$. Se toman previamente logaritmos neperianos.

EJERCICIO 3.25. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

SOLUCION:

$$\lim_{x\to 0} x^x = y : \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln x^x = \ln y$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Por tanto, $\ln y = 0 \iff y = e^0 = 1.$

EJERCICIO 3.26. Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = y;$$

$$\ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{2(-1 - \operatorname{cotg}^2 2x)} = \frac{\frac{1}{1}(1 + 1^2)}{2(-1 - 0)} = -1.$$

Por tanto, $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

EJERCICIO 3.27. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = y;$$

$$\ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Por tanto: $y = e^0 = 1.$

EJERCICIO 3.28. Calcular: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} 2x}$.

SOLUCION. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} 2x} = y$:

$$\ln y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{cosec} 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen}^2 2x}{2\cos 2x \cdot \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} 2x \, 2 \operatorname{sen} x \cos x}{2\cos 2x \cdot \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-\operatorname{tg} 2x) = 0.$$

Por tanto, $y = e^0 = 1$.

EJERCICIO 3.29. Calcular: $\lim_{x \to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} x^{\operatorname{tg} x} = y;$$

$$\ln y = \lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = 1 \lim_{x \to 0} (-\operatorname{sen} x) = 0.$$

Por tanto, $y = e^0 = 1$.

EJERCICIO 3.30. Calcular: $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

SOLUCION:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = y;$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Por tanto, $y = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

EJERCICIO 3.31. Hallar la derivada n-ésima de la función y = sen 5x.

SOLUCION:

$$y = \operatorname{sen} 5x$$

$$y' = 5\cos 5x = 5\operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = = -5^2\operatorname{sen} 5x = 5^2\operatorname{sen}\left(5x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -5^3\cos 5x = 5^3\operatorname{sen}\left(5x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = 5^4\operatorname{sen} 5x = 5^4\operatorname{sen}\left(5x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

....

....

$$y^{(n)} = 5^n\operatorname{sen}\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

EJERCICIO 3.32. Descomponiendo la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} \text{ en } \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

encontrar, previo cálculo de las constantes A, B, a y b, la derivada n-ésima de la función f(x).

SOLUCION. Empezaremos calculando la derivada n-ésima de una función del tipo $g(x) = \frac{M}{x - N} = M(x - N)^{-1}$.

$$g'(x) = -M(x - N)^{-2}$$
$$g''(x) = 2M(x - N)^{-3}$$
$$g'''(x) = -2 \cdot 3M(x - N)^{-4}$$
$$g^{IV}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4M(x - N)^{-5}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

A la vista de los sucesivos resultados, podemos concluir que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! M(x - N)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n M n!}{(x - N)^{n+1}} \qquad (1)$$

Las raíces del denominador de $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$ son $x = 1$ y $x = -2$, es decir, $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ y, por consiguiente, a la función racional f(x) le corresponde una descomposición en fracciones simples del tipo:

$$\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Efectuando la suma del segundo miembro, e identificando los coeficientes del mismo grado de los polinomios del numerador, se otiene:

$$\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(A + B)x + 2A - B}{(x - 1)(x + 2)}, \quad \text{y de aquí } A = B = 1$$

luego la descomposición pedida es $f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}$, y teniendo en cuenta (1), la derivada n-ésima de la función f(x) es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x - 1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x + 2)^{n+1}} = (-1)^n n! \frac{(x + 2)^{n+1} + (x - 1)^{n+1}}{(x^2 + x - 2)^{n+1}}$$

$$f^n(x) = (-1)^n n! \frac{(x + 2)^{n+1} + (x - 1)^{n+1}}{(x^2 + x - 2)^{n+1}}$$

EJERCICIO 3.33. Calcular la derivada n-ésima de

$$y = \frac{2x + 5}{x^2 - 3x + 2}$$

(Nota: Se sugiere descomponer en fracciones simples).

SOLUCION:

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$: $\quad \dfrac{2x + 5}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x - 2} = \dfrac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}.$

Debe ser: $2x + 5 = A(x - 2) + B(x - 1) \rightarrow A = -7;\ B = +9.$

$$y = \left(\frac{2x + 5}{x^2 - 3x + 2}\right) = \left(\frac{-7}{x - 1}\right) + \left(\frac{9}{x - 2}\right) = -7(x - 1)^{-1} + 9(x - 2)^{-1}$$

$$y' = 7(x - 1)^{-2} - 9(x - 2)^{-2}$$

$$y'' = -2 \cdot 7(x - 1)^{-3} + 2 \cdot 9(x - 2)^{-3}$$

$$y''' = 2 \cdot 3 \cdot 7(x - 1)^{-4} - 2 \cdot 3 \cdot 9(x - 2)^{-4} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} n! 7(x - 1)^{-(n+1)} - (-1)^{n+1} n! \cdot 9(x - 2)^{-(n+1)}.$$

EJERCICIO 3.34. Calcular el coseno de un grado sexagesimal con un error menor que una milésima.

SOLUCION. Recordando el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \cos x$ en $x = 0$, se tiene:

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + T_{2n}$$

donde T_{2n} es el término complementario o resto, que sabemos que en la forma de Lagrange es

$$T_{2n} = \frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, \quad \text{con} \quad \theta \in (0, 1),$$

es decir,

$$T_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} \theta x}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, \quad \text{con} \quad \theta \in (0, 1).$$

Lo anterior significa que si aproximamos el valor de $\cos x$ por el valor del polinomio

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

el error cometido en la aproximación es:

$$|T_{2n}| = \frac{|\operatorname{sen} \theta x|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

donde hemos usado que $|\operatorname{sen} \theta x| \leqslant 1$.

Teniendo en cuenta que un grado sexagesimal equivale a $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ radianes, tendremos:

$$\cos 1.^{\circ} = \cos \frac{\pi}{180} \cong P_{2n}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

y el error cometido en la aproximación anterior es:

$$|T_{2n}| \leqslant \frac{\left|\frac{\pi}{180}\right|^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{\left(\frac{4}{180}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{1}{40^{2n+1}(2n+1)|}$$

Si deseamos que el error cometido sea menor que k, basta tomar n de modo que

$$\frac{1}{40^{2n+1}(2n+1)!} < k.$$

En el caso $k = 0{,}001$, basta tomar $n = 1$, ya que

$$\frac{1}{40^3 \cdot 3!} = \frac{1}{38.400} < 10^{-3}.$$

Por consiguiente, si aproximamos

$$\cos \frac{\pi}{180} \quad \text{por} \quad P_2\left(\frac{\pi}{180}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{2!},$$

el error cometido es menor que una milésima.

EJERCICIO 3.35. Aplicar la fórmula de Taylor en $x = 0$ a la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, siendo el término complementario el correspondiente al monomio de cuarto grado. Aplicar la fórmula obtenida al calculo de $f(0, 1)$, y obtener una cota del error cometido.

SOLUCION. En el enunciado se ha respetado el original, y debemos suponer que al solicitar que calculemos $f(0, 1)$, se nos pide que estimemos el valor de $f(1)$, utilizando el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$, esto es, que aproximemos el valor de $f(1)$ por lo que el polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$ vale para $x = 1$.

El desarrollo de Taylor en $x = 0$ (desarrollo de Mac-Laurin) hasta grado tres correspondiente a la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ es:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + T_3$$

donde

$$T_3 = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4, \quad \text{con} \quad \theta \in (0,1)$$

siendo:

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x),\ f'(0) = e^0 \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x;\ f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x);\ f'''(0) = 2$$

$$f^{(IV)}(x) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + 2e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = -4e^x \operatorname{sen} x.$$

Por tanto, el desarrollo pedido es:

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + T_3 \quad \text{y} \quad T_3 = \frac{-4e^{\theta x} \operatorname{sen} \theta x}{4!}x^4 = -\frac{e^{\theta x} \operatorname{sen} \theta x}{6}x^4,$$

siendo θ un número comprendido entre 0 y 1.

En particular, $f(1) \cong 1 + 1^2 + \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$, y el error cometido es

$$|T_3| = \frac{e^\theta \operatorname{sen} \theta}{6} 1^4 \leqslant \frac{e}{6} < \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

donde para obtener una cota del error hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen} \theta \leqslant 1$, y que al ser $0 < \theta < 1$ y e^x una función creciente, $e^\theta < e^1 < 3$.

EJERCICIO 3.36. Calcular mediante la fórmula de Taylor el valor del seno de un grado sexageximal.

SOLUCION. El desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$, es:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + T_{2n-1}$$

donde el término complementario es

$$T_{2n-1} = (-1)^n \frac{\operatorname{sen} \theta x}{(2n)!} x^{2n}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Tomando el desarrollo hasta grado tres, y teniendo en cuenta que un grado sexagesimal equivale a $\frac{\pi}{180}$ radianes, tenemos:

$$\operatorname{sen} 1.^\circ \cong \operatorname{sen}\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 180^3} = 0{,}0174523,$$

y el error cometido en esta aproximación es:

$$|T_3| = \left|(-1)^2 \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{180}}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4\right| < \frac{1}{4!}\left(\frac{4}{180}\right)^4.$$

EJERCICIO 3.37. Aplicar la fórmula de Taylor a la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en un entorno del punto $x = 3$, obteniendo los tres primeros términos. Acotar el error que se comete al calcular la función f en el punto 3,001 por la aproximación dada por la suma de esos tres términos, con ayuda de un resto.

SOLUCION. El desarrollo de Taylor en $x = 3$ hasta grado n de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ es:

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + T_n$$

donde el término complementario T_n es:

$$T_n = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-3)^{n+1},$$

siendo t un número real comprendido entre x y 3, es decir, $t = 3 + \theta(x - 3)$, con $\theta \in (0, 1)$.

En general, dada la función $g(x) = \dfrac{A}{ax + b}$, su derivada n-ésima es la función

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! A a^n}{(ax + b)^{n+1}}.$$

Para $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ es

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}} \quad y \quad f^{(n)}(3) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Por consiguiente, el desarrollo de f(x) hasta grado 3 alrededor del punto $x = 3$ es:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 3) - \frac{1}{8}(x - 3)^2 + \frac{1}{16}(x - 3)^3 + T_3,$$

donde

$$T_3 = \frac{4!/(1 - t)^5}{4!}(x - 3)^4 = \frac{(x - 3)^4}{(1 - t)^5}.$$

Por tanto, si $x = 3{,}001$, es

$$f(3{,}001) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}0{,}001 - \frac{1}{8}(0{,}001)^2 + \frac{1}{16}(0{,}001)^3 = -0{,}4997501,$$

y el error cometido en la aproximación es

$$|T_3| = \frac{(0{,}001)^4}{|1 - t|^5},$$

siendo t un número comprendido entre 3 y 3,001.

Para obtener una cota del error podemos hacer: como $3 < t < 3{,}001$, $-2{,}001 < 1 - t < -2$, luego $|1 - t| > 2$, y tenemos:

$$|T_3| < \frac{(0{,}001)^4}{2^5}.$$

EJERCICIO 3.38. Aplicar la fórmula de Taylor en $x = 0$ a la función $f(x) = x \cdot e^x$ siendo el término complementario el correspondiente al monomio de tercer grado, es decir, el término complementario es de orden tres. Calcular $f(1/2)$ aplicando la fórmula obtenida.

SOLUCION. Puesto que debemos calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = xe^x$, daremos el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de grado n.

$$f(x) = xe^x \quad ; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$$

....

....

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x = (n + x)e^x, \quad \text{luego} \quad f^{(n)}(0) = n.$$

El desarrollo es:

$$f(x) = xe^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

donde

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(n + 1 + \theta x)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad \text{con} \quad \theta \in (0,1).$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente del término de grado k es:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

el desarrollo queda:

$$f(x) = xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + R_n$$

Para el caso particular en que $n = 2$, queda:

$$f(x) = xe^x = x + x^2 + R_2,$$

donde

$$R_2 = \frac{(3 + \theta x)e^{\theta x}}{3!}x^3; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \cong \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

y el error cometido en esta aproximación es

$$R_2 = \frac{\left(3+\frac{\theta}{2}\right)e^{\theta/2}}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 3}{3!}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{32} = 0{,}21875.$$

Para la acotación del error se ha tenido en cuenta que

$$0 < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad e^{\theta/2} < e < 3.$$

EJERCICIO 3.39. Calcular $\sqrt[3]{e^2}$ con 2 cifras decimales exactas por Mac-Laurin, es decir, con error $< \frac{1}{10^2}$.

SOLUCION. Sabemos que:

$$\sqrt[3]{e^2} = e^{2/3} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\theta x}$$

siendo

$$x = \frac{2}{3} \quad ; \quad 0 < \theta < 1$$

es decir:

$$e^{2/3} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} e^{\theta^{2/3}}$$

Puesto que: $e^{\theta^{2/3}} < e^1 < 3$ se comprueba que el error cometido, es menor que $\frac{1}{10^2}$, por primera vez para $n = 4$, ya que:

$$\text{Error} = \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{3}\right)^5 e^{\theta^{2/3}} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}\cdot 3 = \frac{4}{1.125} < \frac{1}{10^2}.$$

Por tanto,

$$e^{2/3} \simeq 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \simeq 1{,}9465...$$

tiene 2 cifras decimales exactas.

EJERCICIO 3.40. Calcular sen 12^0 con cuatro cifras decimales exactas, aplicando la fórmula de Mc-Laurin.

SOLUCION: 12^0 equivalen a $\frac{\pi}{15}$ radianes. Recordando que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \mp R_n$$

Siendo

$$|R_n| = \left| \frac{\operatorname{sen} \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En este caso el error cometido es

$$\varepsilon < \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Bastará, pues, que:

$$\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)!} < \frac{1}{10^4}.$$

Para $n = 1$ es:

$$\frac{1}{3^3 3!} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^4}.$$

Para $n = 2$ es:

$$\frac{1}{3^5 \cdot 5!} = \frac{1}{243 \cdot 5!} < \frac{1}{10^4}.$$

$$\text{Por tanto, } \operatorname{sen} 12^0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)^{rd} = \frac{\frac{\pi}{15}}{1!} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!}$$

es una aproximación de sen 12^0 con 4 cifras decimales exactas.

EJERCICIO 3.41. Demostrar la doble desigualdad siguiente, para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + 2x^2.$$

¿Es válida alguna de las desigualdades en un intervalo mayor?

SOLUCION. El desarrollo de una función f(x) por la fórmula de Mac-Laurin es:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + T_c$$

siendo

$$T_c = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Aqui es: $f(x) = e^x$. Por tanto, se verifica:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{e^{\theta x}}{2}x^2 \quad (0 < \theta < 1) \qquad (1)$$

ya que:

$$f'(0) = e^1;\ f''(\theta x) = e^{\theta x}.$$

Como: $\theta \in]0, 1[$, resulta que:

$$e^{\theta x} < e^1 \Rightarrow \frac{e^{\theta x}}{2} < \frac{e}{2} < 2$$

y, en consecuencia:

$$1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + 2x^2 \quad \forall x \in [0, 1].$$

La 1.ª) de las desigualdades es cierta para todo valor de x por (1) y ser:

$$\frac{e^{\theta x}}{2}x^2 \geqslant 0$$

La 2.ª) sólo para $x \in [0, \ln 4]$, pues únicamente para esos valores es:

$$\frac{e^x}{2} < 2.$$

EJERCICIO 3.42. Desarrollar por la fórmula de Taylor en el punto 0 la función $f(x) = e^x$ hasta el término de tercer orden (se entenderá que el resto es el término de tercer orden). Calcular aproximadamente $e^{0,1}$ con un error menor que una milésima.

SOLUCION. El desarrollo de Taylor de la función $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ es:

$$f(x) = e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

donde el resto o término complementario es

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

siendo θ un número comprendido entre 0 y 1.

Como es $f(x) = f^{(k)}(x) = e^x$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, se tiene que $f^{(k)}(0) = 1$, y el desarrollo queda:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

siendo

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{con} \quad \theta \in (0,1).$$

Si $x = 0{,}1$ y tomamos el desarrollo de modo que el resto sea el término de tercer orden, obtenemos:

$$e^{0,1} = 1 + 0{,}1 + \frac{(0{,}1)^2}{2!} + \frac{e^{0,1\theta}}{3!}(0{,}1)^3$$

es decir:

$$e^{0,1} \cong 1 + 0{,}1 + \frac{(0{,}1)^2}{2} = 1{,}1 + \frac{1}{200} = 1{,}105,$$

y el error cometido en la aproximación es

$$R_2 = \frac{e^{0,1\theta}}{6}(0{,}1)^3 < (0{,}1)^3 = 10^{-3}.$$

EJERCICIO 3.43. Aplicando la fórmula de Taylor calcular el seno de 31 grados sexagesimales, con un error menor que 0,0001.

SOLUCION. $31° = 30° + 1° = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$radianes:

El desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ alrededor de $x = a$ es:

$$f(a+h) = \operatorname{sen}(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n,a}$$

donde el término complementario es

$$R_{n,a} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

siendo t un número comprendido entre a y a + h. Este desarrollo nos permite dar una aproximación de $\operatorname{sen}(a+h)$, conocido sena y las n primeras derivadas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = a$, y el error cometido en la aproximación es $|R_{n,a}|$, que puede hacerse tan pequeño como queramos, tomando n suficientemente grande, esto es, podemos calcular $\operatorname{sen}(a+h)$ con la precisión que deseemos.

Para calcular $\operatorname{sen} 31^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$, utilizaremos el desarrollo en $x = \frac{\pi}{6}$, y para que el error cometido sea menor que 10^{-4}, basta tomar $n = 2$.

$$\operatorname{sen} 31^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{1!}\frac{\pi}{180} - \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2.$$

El error cometido es:

$$|R_{2,\pi/6}| = \left|\frac{f'''(t)}{3!} h^3\right| = \frac{|-\cos t|}{6} = \left(\frac{\pi}{180}\right)^3,$$

siendo

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180},$$

y teniendo en cuenta que $|-\cos t| < 1$ y que $\pi = 3{,}1416... < 4$, tendremos:

$$|R_{2,\pi/6}| < \frac{1}{6}\left(\frac{4}{180}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{45}\right)^3 < 10^{-4}.$$

Nota: Puesto que el desarrollo de Mac-Laurin de la función seno

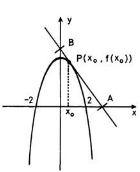
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

es válido para todo x, podíamos haberlo usado para la estimación del valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$, pero puesto que $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$ está muy alejado de $x = 0$, para que el error cometido sea menor que 10^{-4}, necesitaríamos tomar un valor grande de n, desde luego, bastante mayor que 2, que ha sido suficiente para lograr la precisión pedida cuando hemos utilizado el desarrollo en $x = \frac{\pi}{6}$.

EJERCICIO 3.44. Hallar el punto de la parábola $y = 4 - x^2$, en el que la tangente determina, en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima con los ejes.

SOLUCION: Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, cuya gráfica es la parábola de la figura, se tiene $f'(x) = -2x$, luego dado un punto $x_0 > 0$, la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x_0 es:

$$y - (4 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0) \qquad (1)$$



Haciendo $y = 0$ en (1), se obtiene:

$$x = \frac{4 + x_0^2}{2x_0},$$

es decir, la tangente corta al eje OX en

$$A\left(\frac{4 + x_0^2}{2x_0}, 0\right).$$

Haciendo $x = 0$ en (1) queda $y = 4 + x_0^2$, es decir, la tangente corta el eje OY en el punto $B(0, 4 + x_0^2)$.

El área del triángulo determinado por la tangente en $P(x_0, 4 - x_0^2)$ y los semiejes positivos es, entonces:

$$S = \frac{1}{2} \frac{4 + x_0^2}{2x_0} (4 + x_0^2) = \frac{1}{4} \frac{(4 + x_0^2)^2}{x_0}.$$

El problema se reduce a calcular el x positivo para el que la función

$$S(x) = \frac{1}{4} \frac{(4 + x^2)^2}{x}$$

es mínima. Derivando e igualando a cero la derivada obtenemos:

$$S'(x) = \frac{1}{4} \frac{2(4 + x^2)2x \cdot x - (4 + x^2)^2}{x^2} = \frac{4 + x^2}{4x^2} (3x^2 - 4)$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \text{ , cuya raíz positiva es } x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

que, en efecto, corresponde al valor mínimo, puesto que

$$\begin{array}{ccc} & S' < 0 & & S' > 0 & \\ \hline 0 & & 2/\sqrt{3} & & \end{array}$$

(también podemos confirmarlo hallando la segunda derivada y observando que $S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$).

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}, \text{ y el punto } P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}\right) \text{ es el punto pedido.}$$

EJERCICIO 3.45. Una fábrica produce un producto de dos calidades distintas: x Tm de baja calidad e y Tm de alta calidad, siendo

$$y = \frac{18 - 5x}{10 - x}.$$

Hallar la cantidad de Tm del producto de baja calidad que ha de producir para obtener ingresos máximos, si el precio por Tm de éste es la mitad que el de alta calidad.

SOLUCION. Sea p = precio por Tm del producto de baja calidad.
I = Ingresos totales.

Tendremos: $I = px + 2py = px + 2p\dfrac{18 - 5x}{10 - x}$

$$I' = p + 2p\frac{-5(10 - x) - (18 - 5x)(-1)}{(10 - x)^2} = p + 2p\frac{-32}{(10 - x)^2} = p - p\frac{64}{(10 - x)^2}$$

Debe ser $I' = 0$, o sea:

$$p = \frac{64p}{(10 - x)^2} \Rightarrow (10 - x)^2 = 64 \begin{cases} 10 - x = 8 & \Rightarrow x_1 = 2 \\ 10 - x = -8 & \Rightarrow x_2 = 18 \end{cases}$$

$$I' = p - 64p(10 - x)^{-2} \Rightarrow I'' = 128p(10 - x)^{-3}.$$

Para $x = 2$ es $I'' < 0$. Luego el máximo de Ingresos se alcanza cuando se producen 2 Tm del producto de baja calidad.

EJERCICIO 3.46. Demostrar que la menor cantidad de lona empleada en confeccionar una tienda de campaña cónica de volumen dado, ocurre cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces el radio de la base.

SOLUCION:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot y \rightarrow y = \frac{3v}{\pi x^2}$$

$$S = \pi x g = \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi x\sqrt{x^2 + \frac{9v^2}{\pi^2 x^4}} = \sqrt{\pi^2 x^4 + \frac{9v^2}{x^2}};$$

$$S' = \frac{1}{2\sqrt{\pi^2 x^4 + \frac{9v^2}{x^2}}}\left(\pi^2 \cdot 4x^3 + 9v^2\left(-\frac{2x}{x^4}\right)\right) = 0 \Rightarrow 4\pi^2 x^3 = \frac{18v^2}{x^3} \Rightarrow$$

$$x^6 = \frac{9v^2}{4\pi^2} \cdot 2 \Rightarrow x^3 = \frac{3v}{2\pi}\sqrt{2}.$$

Siendo

$$y = \frac{3v}{\pi x^2}$$

resulta:

$$y = \frac{3vx}{\pi x^3} = \frac{3v \cdot x}{\pi \frac{3v}{2\pi}\sqrt{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot x.$$

EJERCICIO 3.47. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$y = \frac{\ln x}{x} \qquad x \in]0, +\infty[$$

Deducir del estudio precedente los máximos y mínimos relativos de dicha función

SOLUCION. Calculando la primera derivada de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, e igualando a cero, otenemos:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \to 1 - \ln x = 0 \to \ln x = 1 \to x = e.$$

Estudiando el signo a izquierda y derecha del punto $x = e$, tenemos:

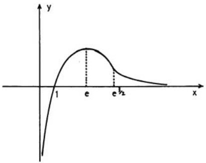
$$\underset{0}{\vdash} \overset{f' > 0}{\nearrow} \underset{e}{+} \overset{f' < 0}{\searrow}$$

Por tanto:

- en el intervalo $(0, e)$, f es extrictamente creciente
- en el intervalo $(e, +\infty)$, f es estrictamente decreciente

x = e es un máximo local de la función f. En realidad en el punto x = e se alcanza el máximo absoluto de f(x) en su dominio de definición $]0, +\infty[$, y el mayor valor que toma la función es $f(e) = \frac{1}{e}$.

La gráfica de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ es:



REPRESENTACIONES GRAFICAS DE FUNCIONES EXPLICITAS: y = f(x).

a) Campo de existencia.

Se determina el subconjunto $D \subset R$ formado con los valores reales de x, que sustituidos en f(x) dan valores reales.

Ejemplo: $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10} = \sqrt{(x-2)(x-5)}$.

Campo de existencia: $D =]-\infty, 2] \cup [5, +\infty[$.

b) Periodicidad.

Si $f(x + T) = f(x) \quad (\forall x \in D) \rightarrow T =$ periodo.

Ejemplo: $y = \cos 2x$.

Se verifica: $\cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2x \, (\forall x \in R) \rightarrow T = \pi$.

c) Simetrías

Si $f(-x) = f(x) \quad (\forall x \in D) \rightarrow$ Simetría respecto al eje Y'Y.

Si $y = \pm f(x)$ $(\forall x \in D) \rightarrow$ Simetría respecto al eje X'X.
Si $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Simetría respecto al origen O de coordenadas.

Ejemplo: $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ simétrica respecto al eje Y'Y, pues:

$$\frac{(-x)^4}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^4}{x^2 - 1}.$$

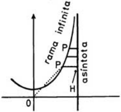
d) Continuidad.

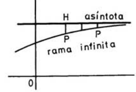
Se estudian los valores de x para los cuales f(x) es continua o discontinua, clasificando estos últimos.

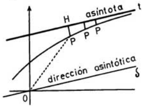
Ejemplos: $y = 3^x$ es continua $\forall x \in R$; $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x}$ es continua para $\forall x \in R$ excepto en los valores que anulan al denominador: $1 - \cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi$ $(k \in z)$. En estos puntos presenta discontinuidades evitables infinitas (la función se define en la recta completa R).

e) Ramas infinitas y asíntotas.

Se dice que un punto P(xy) de una curva de ecuación $y = f(x)$ se aleja infinitamente sobre ella si su abscisa x o su ordenada y, o ambas, crecen infinitamente. Cuando esto ocurre se dice también que P recorre una *rama infinita* de la curva.







Si al recorrer P una rama infinita de la curva, la recta OP tiende a una posición límite δ, entonces esa recta y todas sus paralelas determinan la llamada *dirección asintótica* de la curva. Si existe una recta t paralela a δ, tal que las distintas PH → 0 (cuando P se aleja infinitamente) se dice entonces que t es la asintota de la curva.

Una curva C se dice que tiene una rama parabólica de coeficiente m, si se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) \text{ tiene límite infinito} \\ 2)\ f(x)/x \text{ tiene límite m} \\ 3)\ f(x) - mx \text{ tiene límite } \infty \end{array}\right\} \text{ para } x \to +\infty \quad (\text{o} \quad x \to -\infty).$$

Cálculo de asíntotas (paralelas a los ejes y oblicuas) y ramas parabólicas.

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$ ⟶ $\boxed{\text{Asíntota de ecuación } x = a}$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x) = b}$ ⟶ $\boxed{\text{Asíntota de ecuación } x = b}$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x) = \infty}$

- $\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x)/x = 0}$ ⟶ $\boxed{\text{Rama parabólica de dirección OX}}$
- $\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x)/x = \infty}$ ⟶ $\boxed{\text{Rama parabólica de direcciónOY}}$
- $\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} f(x)/x = \text{finito} = m \neq 0}$
  - $\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} [f(x) - mx] = \infty}$ ⟶ $\boxed{\text{Rama parabólica de coeficiente director m}}$
  - $\boxed{\lim_{x\to +\infty(-\infty)} [f(x) - mx] = \text{finito} = n}$ ⟶ $\boxed{\text{Asíntota obllicua de ecuación: } y = mx + n}$

Ejemplos: $y = \dfrac{1}{x+5}$ tiene la asintota paralela al eje Y'Y de ecuación: $x = -5$

$$y = \frac{2x}{x+3} \text{ tiene la asíntota paralela al eje X'X de ecuación: } y = 2$$

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} \text{ tiene la asíntota oblicua de ecuación } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

pues:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 2x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

y

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2}x \right] = \frac{-1}{2}.$$

f) Elementos notables (*)

Si $f'(a)_+ = f'(a)_-$ existe derivada en el punto $x = a$. Y si $f'(a)_+ \neq f'(a)_-$: a es punto anguloso.

Ejemplo: $y = |x^2 - 9|$ tiene en $a = 3$ y $a = -3$ dos puntos angulosos.

Crecimiento y decrecimiento en un punto x_0.

$$\text{Si} \begin{cases} f'(x_0) > 0 & \text{crece estrictamente en } x_0 \\ f'(x_0) < 0 & \text{decrece estrictamente en } x_0 \end{cases}$$

Ejemplo: $y = \operatorname{sen} x$ tiene en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ un punto de crecimiento, pues: $\cos\frac{\pi}{4} > 0$

$y = \frac{1}{x}$ tiene en $x_0 = 2$ un punto de crecimiento, pues: $-\frac{1}{4} < 0$.

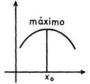
Nota. La condición anterior no es suficiente. Es decir, pueden existir funciones estrictamente crecientes (o decrecientes) en un punto x_0, sin que se cumpla $f'(x_0) > 0 (f'(x_0) < 0)$.

Crecimiento y decrecimiento en un intervalo (a, b).

Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, f es estrictamente creciente en (a, b), y si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$, f es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b).

Máximos y mínimos relativos. Concavidad e inflexión.

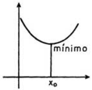
Condición necesaria y suficiente de máximo



$$\begin{Bmatrix} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{Bmatrix}$$

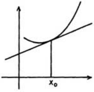
Nota. En la duda se aplica la fórmula de Taylor.

Condición necesaria y suficiente de mínimo

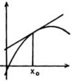


$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Cóncava hacia y^+ en el punto x_0.

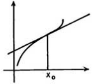


Convexa hacia y^+ en el punto x_0.



Si $f''(x_0) < 0$

Punto de inflexión en x_0.



Si $f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Ejemplos: Máximos y mínimos de

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x$$

$$y' = x^2 - 2x - 8 \quad : \quad x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x_1 = -2 & \rightarrow \quad y''_{-2} < 0 \quad \text{máximo} \\ x_2 = 4 & \rightarrow \quad y''_4 > 0 \quad \text{mínimo.} \end{cases}$$

$$y'' = 2x - 2$$

Estudiar la concavidad y convexidad de

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + x - 5$$

$$y' = \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1$$

$$y'' = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

En $]-\infty, 1[$ cóncava, respecto a y^+.
En $]1, 2[$ convexa respecto a y^+
En $]2, +\infty[$ cóncava, respecto a y^+.
Puntos de inflexión de la curva anterior

$$y'' = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$
$$y''' = 2x - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } x_1 = 1 \quad \text{es} \quad y'''(1) \neq 0 \\ \text{Para } x_2 = 2 \quad \text{es} \quad y'''(2) \neq 0 \end{array}\right\} \text{puntos de inflexión.}$$

g) Puntos de corte con los ejes.

Con el eje X'X se resuelva el sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

y con el eje Y'Y el

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Ejemplos: Puntos de corte con X'X de

$$y = \frac{x - x^2}{x^2 + 1} \quad \begin{cases} y = \dfrac{x - x^2}{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x - x^2 = 0 \rightarrow x(1 - x) = 0: \begin{cases} (0.0) \\ (1, 0). \end{cases}$$

h) Tabla de valores.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

i) Dibujo de la curva.

En un sistema cartesiano de referencia se llevan los puntos obtenidos en la tabla de valores y los elementos notables y si es continua se unen aproximadamente.

EJERCICIO 3.48. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Hallar la ecuación de la tangente a dicha gráfica en su punto de inflexión.

SOLUCION. La función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ es polinómica y, por tanto, está definida, es continua y derivable en toda la recta real.

Signo de $f(x)$

$f(x) = 2(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 2(x - 1)(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3}))$, luego corta el eje OX en los puntos $(1, 0)$, $(1 + \sqrt{3}, 0)$ y $(1 - \sqrt{3}, 0)$, y el signo de la función es

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) < 0 & & f(x) > 0 & & f(x) < 0 & & f(x) > 0 \\ \hline & 1 - \sqrt{3} & & 1 & & 1 + \sqrt{3} & \end{array}$$

Además, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, por ser un polinomio de grado impar con coeficiente principal positivo.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

$f'(x) = 2(3x^2 - 6x) = 6x(x - 2)$, y la derivada se anula para $x = 0$ y $x = 2$, siendo:

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) > 0 & & f'(x) < 0 & & f'(x) > 0 \\ \hline \nearrow & 0 & \searrow & 2 & \nearrow \end{array}$$

Por tanto, $x = 0$ es un máximo local y $x = 2$ un mínimo local.

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

$f''(x) = 2(6x - 6) = 12(x - 1)$, y $f''(x)$ se anula en $x = 1$.

El signo de la segunda derivada es

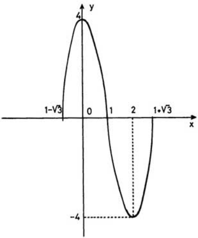
$$\begin{array}{ccc} f''(x) < 0 & & f''(x) > 0 \\ \hline \text{cóncava} & 1 & \text{convexa} \end{array}$$

luego el punto de abscisa $x = 1$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

En el punto $P(1, 0)$ la gráfica de $f(x)$ representa un punto de inflexión, la derivada en $x = 1$ es $f'(1) = -6$, luego la tangente a la curva en P es la recta de ecuación $y - 0 = -6(x - 1)$.

$6x + y - 6 = 0$ Ecuación de la tangente pedida.

La gráfica de la función f(x) es:



EJERCICIO 3.49. Estudiar crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión para la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$$

SOLUCION. El dominio de definición de la función f(x) en $R - \{0\}$, y es continua y derivable en todo su campo de definición.

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)x - (x^2 + x + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

La primera derivada se anula en $x = 1$ y $x = -1$, y su signo es

$$\underset{}{f' > 0}\ \underset{-1}{\cdot}\ f' < 0\ \underset{0}{\cdot}\ f' < 0\ \underset{1}{\cdot}\ f' > 0$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son entonces:

en $(-\infty, -1)$ $f(x)$ es creciente
$(-1, 0)$ $f(x)$ es decreciente
en $(0, 1)$ $f(x)$ es decreciente
en $(1, +\infty)$ $f(x)$ es creciente

Por consiguiente, $x = -1$ es un máximo local y $x = 1$ un mínimo local.

Escribiendo $f'(x) = 1 - x^{-2}$, tenemos

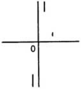
$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}, \quad \text{se tiene que} \quad \underset{0}{\overline{\quad f''(0) < 0 \quad f'' > 0 \quad}},$$

es decir, en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es cóncava y en el $(0, +\infty)$ es convexa, y $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

Si queremos construir la gráfica de $f(x)$, estudiemos previamente si tiene asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

* *Asíntotas verticales*

Puesto que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 0$ (eje coordenado OY) es una asíntota vertical, y la posición de la curva respecto de ella es:



* *Asíntotas horizontales*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, luego $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

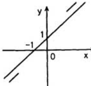
* *Asíntotas oblicuas*

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1$$

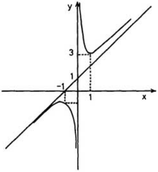
$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$$

la recta $y = x + 1$ es entonces una asíntota oblicua, y la posición de la curva respecto de ella es:

$$f(x) - y = \frac{x^2 + x + 1}{x} - (x + 1) = \frac{1}{x}\begin{cases} < 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ > 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



La gráfica de f(x) es:



EJERCICIO 3.50. **a) Representar la función $g(x) = x^3 - 2x$.**
b) Representar la función $f(x) = |x^3 - 2x|$.
c) Justificar si existe algún punto en el que f no es derivable.

SOLUCION. La función g(x) es polinómica y, por consiguiente, continua y derivable en toda la recta real.

* *Simetrías*

Al ser $g(-x) = -g(x)$, la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas.

* *Cortes con los ejes*

$g(x) = x(x^2 - 2) = 0$ para $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$, y el signo de $g(x)$ es:

$$\begin{array}{cccc} g < 0 & g > 0 & g < 0 & g > 0 \\ \hline & -\sqrt{2} \quad & 0 \quad & +\sqrt{2} \end{array}$$

$g(0) = 0$, luego corta al eje OY en el origen de coordenadas.

* *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos*

$g'(x) = 3x^2 - 2$, que se anula para $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} g' > 0 & g' < 0 & g' > 0 \\ \hline & -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad +\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{array}$$

luego para $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ se tiene un máximo local y en $x = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ un mínimo local.

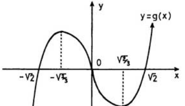
* *Concavidad, convexidad y puntos de inflexión*

$g''(x) = 6x$, se anula solamente en $x = 0$, y es:

$$\begin{array}{cc} g'' < 0 & g'' > 0 \\ \hline \text{cóncava} \quad 0 & \text{convexa} \end{array}$$

luego $x = 0$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

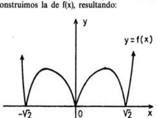
La gráfica de $g(x)$ es:



$$f(x) = |x^3 - 2x| = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & \text{si } g(x) \geq 0 \\ -g(x), & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}, \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x, & \text{si } x < -\sqrt{2} \\ x^3 - 2x, & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ -x^3 + 2x, & \text{si } 0 < x < \sqrt{2} \\ x^3 - 2x, & \text{si } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

la gráfica de f(x) coincide con la de g(x) en $[-\sqrt{2}, 0] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$, y es la simétrica de ella respecto del eje OX en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Por consiguiente, a la vista de la gráfica de g(x) construimos la de f(x), resultando:



Observando la gráfica de f(x) se ve que no es derivable en los puntos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$, por ser distintas las derivadas laterales en dichos puntos. En efecto, resulta que:

$$f'_-(-\sqrt{2}) = -3(-\sqrt{2})^2 + 2 = -4$$
$$f'_+(-\sqrt{2}) = 3(-\sqrt{2})^2 - 2 = 4$$
$$f'_-(0) = -2$$
$$f'_+(0) = 2$$
$$f'_-(\sqrt{2}) = -3(\sqrt{2})^2 + 2 = -4$$
$$f'_+(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 2 = 4$$

EJERCICIO 3.51. Representar la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$, donde la variable x varía en el conjunto de los números reales.

SOLUCION. La función f(x) es continua en todo R y al ser $f(-x) = f(x)$, es simétrica respecto del eje y. Además, puesto que para todo x es $0 \leq f(x) < 1$, su gráfica se encuentra en la banda del plano limitada por las rectas $y = 0$ e $y = 1$. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, luego la recta $y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

* *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos*

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - 2x^3}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 2)^2},$$

y la primera derivada se anula en $x = 0$, siendo su signo:

$$\begin{array}{cc} f' < 0 & f' > 0 \\ \hline & \hspace{-2em} 0 \end{array}$$

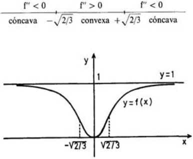
la función es entonces estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$, y en $x = 0$ tiene un mínimo local (en realidad es mínimo absoluto, ya que $f(0) = 0$ y $f(x) \geqslant 0$).

* *Concavidad, convexidad y puntos de inflexión*

$$f''(x) = 4\frac{(x^2 + 2)^2 - 2(x^2 + 2)2x \cdot x}{(x^2 + 2)^4} = 4\frac{2 - 3x^2}{(x^2 + 2)^3}$$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, son las soluciones de $f''(x) = 0$, y se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} f'' < 0 & & f'' > 0 & & f'' < 0 \\ \hline \text{cóncava} & -\sqrt{2/3} & \text{convexa} & +\sqrt{2/3} & \text{cóncava} \end{array}$$



EJERCICIO 3.52. Representar $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

SOLUCION:

a) Campo de existencia: R.
b) No es periódica.
c) No tiene simetrías.
d) Por ser una función polinómica es continua para todo valor real de x.
e) Asíntotas: No tiene. Si dos ramas parabólicas en las direcciones positiva y negativa del eje y.
f) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$

$y'' = f''(x) = 6x - 12.$

Por tanto, siendo

$$f'(x) > 0 \quad \text{en} \quad]-\infty, 1[U]3, +\infty[$$

en esos intervalos es creciente f(x), siendo $f'(x) < 0$ en $]1, 3[$, en este intervalo es decreciente f(x)

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow (1, 3) \text{ máximo} \\ x_2 = 3 \rightarrow f''(3) > 0 \rightarrow (3, 0) \text{ mínimo} \end{cases}$$

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ punto de inflexión (2,2) pues $f'''(2) = 6 \neq 0$.

Para $x > 2 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es convexa
Para $x < 2 \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

g) Puntos de corte: con el eje X'X

$$\left\{\begin{array}{r} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \text{raíces no exactas} \\ \text{una: } x_1 \in]0, 1[\\ \text{otra: } x_2 \in]2, 3[\\ \text{y otra: } x_3 \in]3, 4[\\ \text{(Teorema de Bolzano)} \end{array}$$

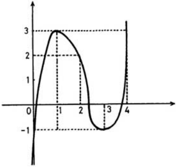
con el eje Y'Y

$$\left\{\begin{array}{r} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (0, -1)$$

k) Tablas de valores.

X	$-\infty$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$	$+\infty$
Y	$-\infty$	$\cdots$	-17	-1	3	1	-1	3	$\cdots$	$+\infty$

i) Dibujo de la curva.



EJERCICIO 3.53. Representar $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

SOLUCION:

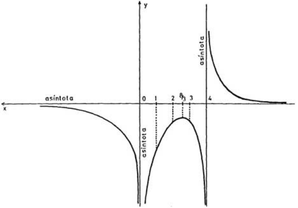
a) Campo de exitencia: $R \sim \{0, 4\}$.
b) No es periódica.
c) No tiene simetrías.
d) Continua excepto en $x = 0$ y $x = 4$.
e) Asíntotas paralelas a los ejes: $x = 0$; $x = 4$; $y = 0$. No tiene asíntotas no paralelas a los ejes.
f) $y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{x^4(x-4)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{8}{3}$. Máximo pues $f''\left(\dfrac{8}{3}\right) < 0$.

$$y'' = \frac{-16(6x-8)\cdot x^4(x-4)^2 + 16(3x^2-8x)\cdot 2\cdot x^2(x-4)\cdot(3x^2-8x)}{x^8(x-4)^2}$$

g) No tiene punto de corte con los ejes.
h) Tabla de valores.

X	$-\infty$	...	-2	-1	0^-	0^+	1	2	8/3	3	4^-	4^+	5	...	$+\infty$
Y	0^-	...	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-16}{5}$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{-16}{3}$	-2	$\frac{-27}{16}$	$\frac{-19}{16}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{16}{25}$	...	0

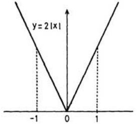
i) Dibujo de la curva.

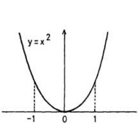


EJERCICIO 3.54. Representar: $y = 2|x| - x^2$.

SOLUCION. Se trata de la diferencia de las funciones $y = 2|x|$; $y = x^2$.

a) Campo de existencia: R.
b) No es periódica.





c) Es simétrica respecto al eje Y'Y, pues:

$$f(-x) = 2|-x| - (-x^2) = 2|x| - x^2 = f(x).$$

d) Continua para todo valor real de x, por ser diferencia de dos funciones continuas en R.

e) Asíntotas. No tiene.

f) $y' = 2 - 2x \rightarrow 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y''(1) = -2$ máximo.

$y'' = -2$. Por simetría tiene otro máximo para $x = -1$.

g) Puntos de corte con X'X

$$\left.\begin{cases} y = 2|x| - x^2 \\ \qquad y = 0 \end{cases}\right\} 2|x| = x^2 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = 2 \rightarrow (2,0) \end{cases}$$

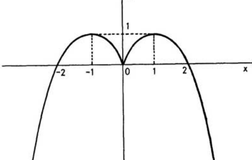
Por simetría también $x = -2 \rightarrow (-2, 0)$.
Puntos de corte con Y'Y

$$\left.\begin{cases} y = 2|x| - x^2 \\ \qquad x = 0 \end{cases}\right\} y = 0 \quad : \quad (x, y) = (0, 0)$$

h) Tabla de valores.

X	$-\infty$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	$+\infty$
Y	$-\infty$	$\cdots$	-3	0	1	0	1	0	-3	$\cdots$	$-\infty$

i) Dibujo de la curva.



EJERCICIO 3.55. **Representar $y = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.**

SOLUCION:

a) Campo de existencia R.

b) No es periódica.

c) No tiene simetrías.

d) Es continua para todo valor real de x, por ser producto de dos funciones continuas en R.

e) No tiene asíntotas.

f) $y' = 3x^2 - 8x + 5 \;:\; 3x^2 - 8x + 5 = 0 \begin{cases} x = 5/3 \\ x = 1 \end{cases}$

$y'' = 6x - 8 \;:\;$ Para $x = \frac{5}{3} \rightarrow f''\left(\frac{5}{3}\right) > 0 \rightarrow$ mínimo

Para $x = 1 \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow$ máximo

$6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \rightarrow$ punto de inflexión.

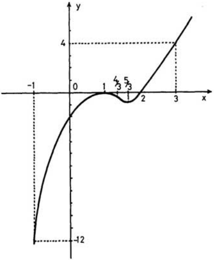
g) Puntos de corte con los ejes.

Con Y'Y $\left.\begin{cases} y = (x-1)^2(x-2) \\ x = 0 \end{cases}\right\} (0, -2)$ con X'X $\left.\begin{cases} y = (x-1)^2(x-2) \\ y = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} (1, 0) \text{ doble} \\ (2, 0) \end{matrix}$

h) Tabla de valores.

X	$-\infty$	⋯	-1	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	3	⋯	$+\infty$
Y	$-\infty$	⋯	-12	-2	0	$\frac{-2}{27}$	$\frac{-4}{27}$	0	4	⋯	$+\infty$

i) Dibujo de la curva.



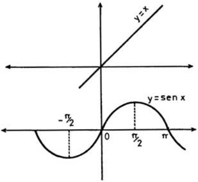
EJERCICIO 3.56. Representar $y = x + \operatorname{sen} x$.

SOLUCION. Se trata de la suma de las funciones: $y = x$; $y = \operatorname{sen} x$.

a) Campo de existencia: R.
b) No es periódica.
c) Simétrica respecto a 0, pues $f(-x) = -f(x)$, ya que:

$$-x + \operatorname{sen}(-x) = -[x + \operatorname{sen} x].$$

d) Continua para todo valor real de x, por ser suma de dos funciones continuas en R.
e) No tiene asíntotas.
f) $y' = 1 + \cos x = 0 \to x = \pi; 3\pi; ...; -\pi; -3\pi; ...$ o sea $x = (2k + 1)\pi (k \in Z)$.
$y'' = -\operatorname{sen} x \;\; : \;\; \operatorname{sen} x = 0 \to x = 0, 2\pi, ...$ o sea $x = 2k\pi \;\; (k \in Z)$.



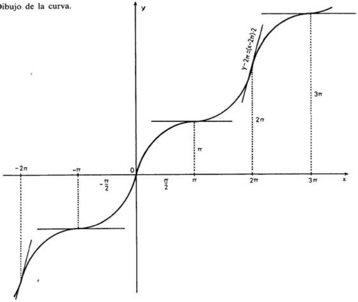
Como $y' \geqslant 0$ para $\forall x \in R$, crece en $]-\infty, +\infty[$.
Los puntos $x = (2k + 1)\pi$ son de inflexión de tangente horizontal.
Los puntos $x = 2k\pi$ son de inflexión de tangente no horizontal.

g) Punto de corte con los ejes: $x = 0$; $y = 0$.

h) Tabla de valores.

X	-2π	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π
Y	-2π	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}-1$	0	$\frac{\pi}{2}+1$	π	2π	3π

i) Dibujo de la curva.



EJERCICIO 3.57. Representar: $y = |\cos x|$.

SOLUCION:

a) Campo de existencia: R.
b) Es periódica, de período π. Pues $|\cos(x + \pi)| = |\cos x|$.
c) Es simétrica respecto al eje Y'Y. Pues $|\cos(-x)| = |\cos x|$.
d) Por ser continua $y = \cos x$ también lo es $y = |\cos x|$ para todo valor real de x.
e) No tiene asíntotas.
f) Estudiemos la derivada en el período $[0, \pi]$.

En $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to f'(x) = -\operatorname{sen} x.$

En $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to f'(x) = \operatorname{sen} x.$

En el punto $x = \frac{\pi}{2}$ no existe la derivada, pues $\begin{array}{l} f'_{\pi/2^-} = -1 \\ f'_{\pi/2^+} = 1 \end{array}$

Tiene máximo en los puntos $0; \pi; 2\pi; ...; -\pi; -2\pi...$

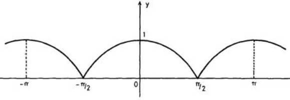
g) Puntos de corte con el eje Y'Y: $(0, 1)$. Con el eje X'X:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \ ; \ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \ \cdots \ \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right) \ ; \ \left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right) \ \cdots$$

h) Tabla de valores.

x	···	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	···
y	···	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	···

i) Dibujo de la curva.



EJERCICIO 3.58. Estudiando el signo de la primera y segunda derivadas de la función $y = (x - 1)/8x$, deduce dónde es creciente o decreciente y dónde es cóncava o convexa. Utiliza los resultados anteriores en la representación de la gráfica de la función $y = (x - 1)/8x$.

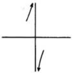
SOLUCION. Hagamos un estudio completo para construir la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-1}{8x}$.

1) *Dominio de definición:* La función está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2) *Cortes con los ejes y signo:* $f(x) = 0 \to x = 1$. Corta al eje OX en el punto $P(1, 0)$.

$$\begin{array}{ccccc} f > 0 & & f < 0 & & f > 0 \\ \hline & 0 & & 1 & \end{array}$$

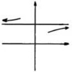
3) *Asíntotas verticales:* La recta $x = 0$ (eje OY) es una asíntota vertical. Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, la posición de la curva respecto de esta asíntota es:



4) *Asíntotas horizontales:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{8}$, luego la recta $y = \dfrac{1}{8}$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.

$$f(x) - \frac{1}{8} = \frac{x-1}{8x} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8x} \begin{cases} < 0, & \text{cuando } x \to +\infty \\ > 0, & \text{cuando } x \to -\infty \end{cases}$$

La posición de la curva respecto de la asíntota $y = \dfrac{1}{8}$ es entonces:



5) *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos:*

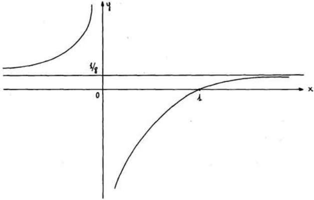
$$f'(x) = \frac{1}{8x^2} \quad , \quad \text{luego} \quad f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

y la función es estrictamente creciente en todo su campo de definición.

6) *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:* $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^3}$, y el signo de f'' es entonces

$$\begin{array}{ccc} f'' > 0 & & f'' < 0 \\ \hline \cup & 0 & \cap \end{array}$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es convexa, y cóncava en $(0, +\infty)$. A la vista del estudio realizado, la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-1}{8x}$ es:



Capítulo IV
CALCULO INTEGRAL: INTEGRAL INDEFINIDA

RESUMEN TEORICO

1. Tabla de integrales inmediatas

1) $\int u^m \, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$

2) $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C$

3) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0 \text{ y } a \neq 1)$

4) $\int e^u = e^u + C$

5) $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

7) $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u| + C = \ln |\sec u| + C$

8) $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\, du = \int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{ctg} u + C$

11) $\displaystyle\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}\, du = \sec u + C$

12) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} u \operatorname{ctg} u\, du = \int \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\, du = -\operatorname{cosec} u + C$

13) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C$

14) $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$

15) $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + C$

Observaciones:

a) Todas las fórmulas anteriores se demuestran derivando el segundo miembro y observando que la derivada es igual al integrando.

b) En algunas fórmulas aparece el signo de valor absoluto. Por ejemplo, escribimos $\displaystyle\int \frac{1}{u}\, du = \ln = |u| + C$, en lugar de poner $\displaystyle\int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C$, si $u > 0$ y $\displaystyle\int \frac{1}{u}\, du = \ln(-u) + C$, si $u < 0$.

c) En todas las fórmulas u indica una función de x. Si $u = f(x)$; $du = f'(x)\, dx$ y podríamos confeccionar una tabla de integrales compuestas. Por ejemplo, en la fórmula (1), tendríamos

$$\int f(x)^m f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{m+1}}{m+1} + C.$$

En la fórmula (3), tendríamos

$$\int \frac{f'(x)\, dx}{\sqrt{a^2 - f(x)^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{f(x)}{a} + C, \text{ etc.}$$

2. Propiedades

1) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

2) $\int (f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3) $\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \quad a \in \mathbb{R}.$

3. Repaso de Métodos de Integración

a) Por descomposición

En virtud de las propiedades 2) y 3) anteriores, se tiene:

$$\int \alpha_1 f_1(x) \pm \alpha_2 f_2(x) \pm \alpha_3 f_3(x) \pm \cdots \pm \alpha_n f_n(x))\,dx =$$

$$= \alpha_1 \int f_1(x)\,dx \pm \alpha_2 \int f_2(x)\,dx \pm \alpha_3 \int f_3(x)\,dx \pm \cdots \pm \alpha_n \int f_u(x)\,dx.$$

b) Por sustitución o cambio de variable

Si en la integral $I = \int f(x)\,dx$, se hace el cambio de variable

$$x = g(t), \quad \text{con g una función derivable y } g'(x) \neq 0,$$

se tiene $dx = g'(t)\,dt$, y la integral I se convierte en

$$I = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

que es una integral donde el integrando es una función de t, que puede ser más fácil de calcular que la original. Si es así, y es:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(t) + C$$

entonces, deshaciendo el cambio efectuado, ponemos $t = g^{-1}(x)$, y obtenemos:

$$I = \int f(x)\,dx = F(g^{-1}(x)) + C.$$

c) Por partes

Si u y v son funciones de x, puesto que es $d(uv) = v\,du + u\,dv$, tenemos $u\,dv = d(uv) - v\,du$, luego $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes para calcular una integral $I = \int f(x)\,dx$, se reconoce el integrando $f(x)$ en la forma $u\,dv$, y tenemos $I = uv - \int v\,du$, pasando entonces a calcular la integral $\int v\,du$, que puede ser más sencilla que la original.

Ejemplo: $I = \int x \operatorname{sen} x\,dx$

Llamamos $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$, y tenemos

$$du = dx, \quad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes queda:

$$I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Observemos que es fundamental elegir convenientemente las funciones u y dv, pues por ejemplo, si en la integral anterior llamamos $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$, tendríamos $du = \cos x\,dx$, $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, luego:

$$I = \int x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$$

y pasamos a una integral más complicada que la original, y aunque la igualdad anterior es cierta, no sería ventajosa su utilización.

d) Integración de funciones racionales

Tratamos de calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si grado P(x) ≥ grado Q(x), se efectúa la división euclídea

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ R(x) & \overline{C(x)} \end{array}, \quad \text{y entonces} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

siendo grado R(x) < grado Q(x).

Por tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

La primera integral del segundo miembro es inmediata, pues C(x) es un polinomio, y la segunda es la integral de una función racional, donde el grado del numerador es menor que el del denominador. Basta, por tanto, con que aprendamos a calcular estas últimas. Para ello, se atiende a las raíces del denominador, y según sean reales o complejas, y teniendo en cuenta la multiplicidad de las raíces, se procede como sigue:

Tipo I: $Q(x)$ tiene todas sus raíces simples

$Q(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$. Se plantea la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}$$

Calculado el valor de los coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \dots, A_u$, tenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - r_1} dx + \int \frac{A_2}{x - r_2} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x - r_n} dx =$$

$$= A_1 \ln|x - r_1| + A_2 \ln|x - r_2| + \cdots + A_n \ln|x - r_n| + C$$

Ejemplo: $I = \displaystyle\int \frac{3x - 7}{x^3 - 10x^2 + 31x - 30} dx.$

Factorizando el denominador obtenemos

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 2)(x - 5)(x - 3),$$

luego se plantea la descomposición:

$$\frac{3x - 7}{(x - 2)(x - 5)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 5} + \frac{C}{x - 3}$$

Operando e igualando numeradores resulta: $A = \frac{1}{3}$; $B = \frac{4}{3}$; $C = -1$. Así queda

$$I = \int \frac{-1/3}{x-2}\,dx + \int \frac{4/3}{x-5}\,dx + \int \frac{-1}{x-3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{4}{3}\ln|x-5| - \ln|x-3| + C$$

Tipo II: $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples

$Q(x) = (x - r_1)^{k_1}(x - r_2)^{k_2} \cdots (x - r_n)^{k_n}$. Se plantea la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - r_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{\pi_1}{x - r_n} +$$

$$+ \frac{\pi_2}{(x - r_n)^2} + \cdots + \frac{\pi_{k_n}}{(x - r_n)^{k_n}}$$

Calculados los coeficientes indeterminados, $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ se descompone en suma de integrales de la forma $\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx$, que son inmediatas, pues:

- Si $m > 1$; $\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = A\int (x-a)^{-m}\,dx = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C$
- Si $m = 1$; $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + D$

Ejemplo: $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)^3}$

La descomposición en fracciones simples correspondiente a esta integral es:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

Efectuando las sumas del segundo miembro e igualando los numeradores, se obtiene:

$$A_1 = -\frac{3}{16} \quad ; \quad A_2 = -\frac{1}{8} \quad ; \quad B_2 = \frac{3}{16} \quad ; \quad B_2 = -\frac{1}{4} \quad ; \quad B_3 = \frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$I = \frac{-3}{16}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$

$$= -\frac{3}{16}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{16}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^2} + C$$

Ejemplo: $I = \int \frac{3x - 5}{(x-2)^2(x-5)}dx$. Es mezcla de los tipos I y II.

La descomposición en fracciones simples que corresponde es:

$$\frac{3x - 5}{(x-2)^2(x-5)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-5}$$

Calculados los coeficientes indeterminados, resulta:

$$A_1 = -\frac{100}{9} \quad ; \quad A_2 = -\frac{1}{3} \quad ; \quad B = \frac{10}{9},$$

luego la integral I queda:

$$I = -\frac{100}{9}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{10}{9}\int \frac{dx}{x-5} =$$

$$= -\frac{100}{9}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\frac{1}{x-2} + \frac{10}{9}\ln|x-5| + C$$

Tipo III: $Q(x)$ tiene raíces complejas simples

Puesto que Q(x) es un polinomio con coeficientes reales, si $z = a + bi$ es una raíz compleja de Q(x), su conjugada $\bar{z} = a - bi$, también es raíz. En la factorización de Q(x) en polinomios irreducibles, esta pareja de raíces origina el factor:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - (a + bi))(x - (a - bi)) = (x - a)^2 + b^2$$

Se plantea una descomposición en fracciones simples, donde cada raíz compleja (simple) agrupada con su conjugada da lugar a una fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax + B}{(x - a)^2 + b^2}$$

y la integral I se descompone en suma de integrales del tipo $J = \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}dx$, que se calculan como sigue:

$$J = \int \frac{\frac{A}{2}2(x-a) + Aa + B}{(x-a)^2 + b^2}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx + (Aa + B)\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln((x-a)^2 + b^2) + \frac{Aa+B}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b} + C$$

Ejemplo: $I = \int \frac{3x + 7}{x^2 + 16}dx.$

$$I = \int \frac{3x}{x^2+16}dx + \int \frac{7}{x^2+16}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+16}dx + 7\int \frac{dx}{x^2+16} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2 + 16) + \frac{7}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{4} + C$$

Ejemplo: $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 25}$

$$I = \int \frac{dx}{(2x+3)^2+16} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+3}{4} + C$$

Cambio: $2x + 3 = t$
$2\,dx = dt$

Ejemplo: $I = \int \frac{2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}dx.$

El denominador $Q(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)$, y puesto que el segundo factor tiene raíces imaginarias, $Q(x)$ tiene una raíz real simple y dos complejas conjugadas simples (es una mezcla de los tipos I y III).

La descomposición en fracciones simples que corresponde es:

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} = \frac{C}{x+1} + \frac{Ax+B}{x^2+2x+3},$$

y resultan

$$A = \frac{1}{2} \quad , \quad B = \frac{5}{2} \quad , \quad C = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x+5}{x^2+2x+3}\,dx$$

Efectuando las integrales del segundo miembro por separado, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C_2$$

luego:

$$I = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

donde hemos puesto $C_1 + C_2 = C$.

Tipo IV: $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples

Este tipo de integrales excede las pretensiones de este libro, pero diremos que para su resolución suele utilizarse el método de Hermite, o bien un proceso de descomposición en fracciones, basado en:

Si $z = a + bi$ es una raíz compleja de multiplicidad n de $Q(x)$, su conjugada $\bar{z} = a - bi$ también, y agrupadas dan lugar al factor $[(x-a)^2 + b^2]^n$ en la descomposición en factores de Q(x). En la descomposición en fracciones que se plantea, esta pareja de raíces dan lugar a n fracciones de la forma:

$$\frac{A_i x + B_i}{[(x-a)^2 + b^2]^i} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ queda descompuesta en suma de integrales de fracciones del tipo (1), que cuando $i > 1$, pueden calcularse mediante un proceso de reducción.

e) Integración de funciones trigonométricas

Para calcular $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R designa una expresión racional en sen x y cos x, hay un método general basado en el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, que convierte el cálculo en el de una integral racional en t, ya que:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad \rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

y la integral es:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2} dt$$

Muchas veces es más ventajoso utilizar otras estrategias, dependiendo de la forma del integrando. Veamos algunas:

1) $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx$, se hace el cambio $\operatorname{sen} x = t$

2) $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$, se hace el cambio $\cos x = t$

3) $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$, se hace el cambio $\operatorname{tg} x = t$

4) $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde el integrando es una expresión impar en sen x o en cos x, se hace el cambio $\cos x = t$ o $\operatorname{sen} x = t$.

5) $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde el integrando es una expresión par en sen x y cos x, se hace el cambio $\operatorname{tg} x = t$.

Un caso particular es $I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde m y n son enteros positivos pares. Si $m = 2p$ y $n = 2q$, para calcular la integral *se suele hacer también*

$$I = \int (\operatorname{sen}^2 x)^p (\cos^2 x)^q\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q$$

y desarrollando los paréntesis y multiplicando, I se descompone en suma de integrales más sencillas.

6) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$; $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$; $\int \cos mx \cos nx\, dx$. Aplicando las fórmulas:

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m - n)x - \cos(m + n)x]$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]$$

se descomponen en suma de dos integrales inmediatas.

7) $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$, con m entero mayor que 1.

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1)\, dx =$$

$$= \underbrace{\int \operatorname{tg}^{m-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx}_{I_1} - \underbrace{\int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx}_{I_2}$$

I_1 es inmediata con el cambio $\operatorname{tg} x = t$

I_2 es del tipo inicial con exponente dos unidades menor.

La misma técnica para calcular $\int \text{ctg}^m x\, dx$.

8) $\int \sec^m x\, dx$; $\int \text{cosec}^m x\, dx$.

- Si m es impar, si aplica la fórmula de reducción:

$$I_m = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} x \cdot \text{tg}\, x + \frac{m-2}{m-1} I_{m-2}$$

donde $I_m = \int \sec^m x\, dx$.

- Si m es par, procedemos como sigue:

$$\int \sec^m x\, dx = \int \sec^{m-2} x \sec^2 x\, dx = \int (1 + \text{tg}^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \sec^2 x\, dx$$

que haciendo el cambio $\text{tg}\, x = t \rightarrow \sec^2 x\, dx = dt$, se convierte en una integral inmediata.

Para el cálculo de $\int \text{cosec}^m x\, dx$, se procede de forma análoga:

- Si m es impar, se aplica la fórmula de reducción:

$$I_m = \frac{-1}{m-1} \text{cosec}^{m-2} x \cdot \text{ctg}\, x + \frac{m-2}{m-1} \cdot I_{m-2}$$

donde $I_m = \int \text{cosec}^m x\, dx$.

- Si m es par, escribimos $\int \text{cosec}^m x\, dx = \int (1 + \text{ctg}^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \text{cosec}^2 x\, dx$ y hacemos el cambio $\text{ctg}\, x = t$.

f) Integración de algunas funciones irracionales

$$1) \quad \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

donde R designa una función racional en x y en potencias de exponente racional de la expresión $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Se integran haciendo el cambio $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, donde p es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes, es decir, $p = \text{m.c.m.}(n, ..., s)$. Calculados x y dx en términos de t, y sustituyendo en la integral, se convierte en una integral de una función racional de t.

2) Integrales binomias $\int x^m(ax^n + b)^p \, dx$, con m, n y p números racionales. Si $p, q = \frac{m+1}{n}$ ó $p + q$ es un número entero, se hace el cambio $x^n = t$, que convierte la integral en una del tipo anterior.

3) Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$.

Suelen calcularse realizando los siguientes cambios:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t, \quad \text{si} \quad a > 0$$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}, \quad \text{si} \quad a < 0 \quad \text{y} \quad c > 0$$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \lambda)t, \quad \text{si} \quad a < 0 \quad \text{y} \quad c < 0$$

siendo λ una de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

4) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$.

Se hace el cambio $x = a \operatorname{sen} t$, que convierte la integral en la de una integral trigonométrica.

5) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \, dx$

Se hace el cambio $x = a \operatorname{tg} t$.

6) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$

Se hace el cambio $x = a \sec t$.

EJERCICIOS

EJERCICIO 4.1. Calcular las integrales: a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

SOLUCION. Llamemos $I = \displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Efectuando el cambio de variable $x^2 = t$, se tiene $2x\,dx = dt$; $x\,dx = \frac{1}{2}dt$. Reemplazando en la integral I x^2 por t y $x\,dx$ por $\frac{1}{2}dt$, resulta:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

b) Sea $I = \displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$. Efectuando el cambio de variable $1 + x^4 = t$, se tiene $4x^3\,dt = dt$; $x^3\,dx = \frac{1}{4}dt$, y la integral queda:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

EJERCICIO 4.2. Integrar: a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$

SOLUCION. Recordando la relación $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, tenemos que

$$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}, \quad \text{luego} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

y la integral queda

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

b) Sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$

Primer método:

Teniendo en cuenta que el denominador es $Q(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, planteamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x + \frac{1}{2}}$$

Efectuando la suma del segundo miembro e identificando los polinomios de los numeradores, se obtiene $A = -2$ y $B = 2$. Por tanto:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(-2\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}\right) = -\ln|x+1| + \ln\left|x+\frac{1}{2}\right| + C$$

Segundo método:

Teniendo en cuenta la identidad

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$$

tenemos $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}$.

Efectuando el cambio de variable $x + \frac{3}{4} = t$; $dx = dt$, y recordando que $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$, obtenemos:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln \left| \frac{t - 1/4}{t + 1/4} \right| = \ln \left| \frac{x + 1/2}{x + 1} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1} = \ln \left| \frac{x + 1/2}{x + 1} \right| + C$$

EJERCICIO 4.3. Calcular: $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx$

SOLUCION. $\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} = \frac{\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} \cdot \sqrt{1 - x}} = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Por tanto

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= \operatorname{arc\,sen} x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

EJERCICIO 4.4. Calcular: $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

SOLUCION:

$$\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx - \int x^{3/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} + C.$$

EJERCICIO 4.5. Calcular: $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

SOLUCION:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

Segundo Método

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = 4\left[-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x\right] + C = -2\operatorname{ctg} 2x + C.$$

EJERCICIO 4.6. Calcular: $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

SOLUCION:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t\,dt}{1+t} = \int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt =$$

$$\int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - L|1+t| + C = e^x - L|1+e^x| + C.$$

cambio $\left.\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{array}\right|$

EJERCICIO 4.7. Calcular: $\displaystyle I = \int \frac{dx}{4+3x^2}$

SOLUCION:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{3}{4}x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}x + C.$$

cambio $\left.\begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}dx \end{array}\right|$

EJERCICIO 4.8. Calcular: $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$

SOLUCION:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (1+t^2)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (2t^2+2t^4)\,dt =$$

$$= 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + C = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} + \frac{(\sqrt{x-1})^5}{5}\right) + C$$

cambio:
$$\left.\begin{aligned} x-1 &= t^2 \\ x &= 1+t^2 \\ dx &= 2t\,dt \end{aligned}\right|$$

EJERCICIO 4.9. Calcular: $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

SOLUCION:

$$\int \frac{x\cdot x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}\cdot(1-t^2)^2}{t}\cdot\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int (1-2t^2+t^4)\,dt =$$

$$= -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\sqrt{1-x^2} + 2\frac{\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \frac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5} + C$$

cambio:
$$\left.\begin{aligned} 1-x^2 &= t^2 \\ x^2 &= 1-t^2 \\ x &= \sqrt{1-t^2} \\ dx &= \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{aligned}\right|$$

EJERCICIO 4.10. Calcular: $\mathbf{I = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx}$

SOLUCION:

$$I = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2(\operatorname{arc\,sen} x)}{4} + C$$

cambio: $\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\, dt \end{array}\right|$

puesto que $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \operatorname{sen} t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = 2x\sqrt{1 - x^2}$, la integral queda:

$$I = \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

EJERCICIO 4.11. Calcular: $\mathbf{I = \int \operatorname{arctg} x\, dx}$

SOLUCION:

$$I = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| dx + C$$

Por partes: $\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \rightarrow du = \dfrac{1}{1 + x^2} dx \\ dv = dx \quad \rightarrow v = x \end{array}\right|$

EJERCICIO 4.12. Calcular: $\mathbf{\int \frac{(x^2 + 1)\, Lx}{x^2} dx}$

SOLUCION:

$$\int \frac{(x^2+1)\, Lx}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) Lx\, dx = \int Lx\, dx + \int \frac{Lx}{x^2} dx = I + J$$

Siendo $I = \int Lx\,dx = x\,Lx - \int 1\,dx = x\,Lx - x + C_1$

Por partes: $\left.\begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array}\right|$

Siendo $J = \int \frac{Lx}{x^2}dx = \frac{-Lx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-Lx}{x} - \frac{1}{x} + C_2$

Por partes: $\begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{array}$

Por tanto: $\int \frac{(x^2+1)\,Lx}{x^2}dx = x\,Lx - x - \frac{Lx}{x} - \frac{1}{x} + C$

EJERCICIO 4.13. Calcular: $\int (x^2+5)e^{-x}\,dx$

SOLUCION:

$$\int (x^2+5)e^{-x}\,dx = -(x^2+5)e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx = -(x^2+5)e^{-x} + J$$

siendo:

$$J = \int 2xe^{-x}\,dx = 2\int xe^{-x}\,dx = 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

Por partes: $\left.\begin{array}{l} x^2+5 = u \rightarrow 2x\,dx = du \\ e^{-x}\,dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right|$ Por partes: $\left.\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right|$

sustituyendo:

$$\int (x^2+5)e^{-x}\,dx = -(x^2+5)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

EJERCICIO 4.14. Calcular la integral $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$.

SOLUCION. Si $I = \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$, integrando por partes, llamamos:

$$\left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(\ln x) & ; \quad du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \\ dv = dx & ; \quad v = x \end{array} \right|$$

y obtenemos:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

Haciendo la integral del segundo miembro de nuevo por partes, llamando:

$$\left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x) & ; \quad du = \frac{-1}{x}\operatorname{sen}(\ln x) \\ dv = dx & ; \quad v = x \end{array} \right|$$

luego:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + I$$

Sustituyendo en el último valor de I obtenido, nos queda:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I \rightarrow 2I = x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

de donde:

$$I = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

EJERCICIO 4.15. Calcular la integral $\int x\ln(1+x)\,dx$.

SOLUCION. $I = \int x\ln(1+x)$. Integrando por partes, llamamos:

$$\left| \begin{array}{ll} u = \ln(1+x) & ; \quad du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x\,dx & ; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

y obtenemos:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(1 + x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1 + x}\,dx \qquad (1)$$

la integral del segundo miembro es

$$\int \frac{x^2}{x + 1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1}\right)dx = \int (x - 1)\,dx + \int \frac{dx}{x + 1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1) + C$$

luego sustituyendo en (1) obtenemos finalmente:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln(1 + x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + x) + C$$

EJERCICIO 4.16. Calcular: $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)}$

SOLUCION. El integrando es una función racional propia donde el denominador está descompuesto en polinomios irreducibles, ya que el factor $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, es decir, el denominador tiene una raíz real simple $x = 0$ y dos raíces complejas conjugadas. La descomposición en fracciones simples que corresponde es:

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Efectuando la suma del segundo miembro e igualando los polinomios del numerador, se obtiene:

$$1 = A(x^2 + x + 1) + x(Bx + C) = (A + B)x^2 + (A + C)x + A$$

de donde $A = 1$, $B = C = -1$. La integral queda:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx \qquad (1)$$

Haciendo las integrales del segundo miembro resulta:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C'$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la igualdad (1), tenemos:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + K$$

EJERCICIO 4.17. Calcular: $I = \int \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$

SOLUCION:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + J$$

siendo:

$$J = \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

cambio: $\left.\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array}\right|$

sustituyendo J queda:

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

EJERCICIO 4.18. Calcular: $\displaystyle\int \frac{x^{11}+x^7}{x^8-3x^4+2}\,dx$

SOLUCION. $(x^{11}+x^7) = (x^8-3x^4+2)\cdot x^3 + (4x^7-2x^3)$. Por tanto:

$$I = \int \frac{x^{11}+x^7}{x^8-3x^4+2} = \int x^3\,dx + \int \frac{4x^7-2x^3}{x^8-3x^4+2}\,dx = \frac{x^4}{4} + J$$

$$\text{siendo:}\quad J = \int \frac{4x^7-2x^3}{x^8-3x^4+2}\,dx$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{8x^7-12x^3}{x^8-3x^4+2}\,dx + \int \frac{4x^3}{x^8-3x^4+2}\,dx = \frac{1}{2}L|x^8-3x^4+2| + H$$

siendo: $\displaystyle H = \int \frac{4x^3}{x^8-3x^4+2}\,dx$

$$H = \int \frac{dy}{y^2-3y+2} = \int \frac{dy}{y-2} - \int \frac{dy}{y-1} = L\frac{y-2}{y-1} + C = L\frac{x^4-2}{x^4-1} = C$$

Para calcular H: cambio: $\left.\begin{array}{r} x^4 = y \\ 4x^3\,dx = dy \end{array}\right|$

$$\frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{A}{y-2} + \frac{8}{y-1} \;\Rightarrow\; A(y-1) + B(y-2) = 1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}\right|$$

Sutituyendo H y J queda:

$$I = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}L|x^8-3x^4+2| + L\frac{x^4-2}{x^4-1} + C$$

EJERCICIO 4.19. Calcular: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx$

SOLUCION. Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es mayor que el del denominador, por lo que hay que efectuar primero la división euclídea de los dos polinomios, y se obtiene la descomposición:

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = x + 3 + \frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{7x-5}{x^2-3x+2}\,dx \quad (1).$$

Calculemos las dos integrales del segundo miembro por separado. La primera es inmediata $\int (x+3)\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C$

Puesto que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, para resolver la segunda, se plantea la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

resultando: $A = -2$. $B = 9$, luego

$$\int \frac{7x-5}{x^2-3x+2}\,dx = -2\ln|x-1| + 9\ln|x-2| + C'$$

Llevando los resultados obtenidos a (1), se tiene:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x-1| + 9\ln|x-2| + K$$

EJERCICIO 4.20. Calcular: $\int \frac{4x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

SOLUCION. El integrando es una función racional propia en la que el denominador $Q(x) = (x-1)(x^2+1)$ tiene una raíz real simple $x = 1$, y dos raíces complejas conjugadas $x = \pm i$.

Descomponiendo en fracciones simples, resulta:

$$\frac{4x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Si llamamos $p(x) = 4x^2 - 4x + 2$ y $p'(x) = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$, como debe ser $p(x) = p'(x)$, identificando los coeficientes del mismo grado de los dos polinomios y resolviendo el sistema que resulta, o bien, como vamos a hacer aquí, utilizando que el valor de $p(x)$ y $p'(x)$ es el mismo cualquiera que sea el valor de x, se obtiene:

para $x = 1$, $p(1) = p'(1) \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1$

$$\text{para } x = 2, \quad p(2) = p'(2) \rightarrow 10 = 5 + 2B + C \rightarrow 5 = 2B + C$$
$$\text{para } x = 0, \quad p(0) = p'(0) \rightarrow 2 = 1 - C \rightarrow C = -1$$

el valor de los coeficientes indeterminados es entonces $A = 1$, $B = 3$ y $C = -1$, y la integral queda:

Haciendo las integrales del segundo miembro resulta:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C'$$

luego

$$\int \frac{4x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + k$$

donde hemos puesto $C + C' = k$.

EJERCICIO 4.21. Calcular $\int \operatorname{sen}^3 3x\,dx$.

SOLUCION:

$$I = \int \operatorname{sen}^3 3x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 3x \operatorname{sen} 3x\,dx = \int (1 - \cos^2 3x)\operatorname{sen} 3x\,dx$$

Haciendo el cambio $\cos 3x = t$, $-3\operatorname{sen} 3x\,dx = dt$, $\operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{1}{3}dt$, y sustituyendo en la integral, se obtiene:

$$I = -\frac{1}{3}\int (1 - t^2)\,dt = -\frac{1}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C$$

deshaciendo el cambio, obtenemos finalmente:

$$\int \operatorname{sen}^3 3x\,dx = -\frac{1}{3}\left(\cos 3x - \frac{1}{3}\cos^3 3x\right) + C$$

EJERCICIO 4.22. Calcular: $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx.$

SOLUCION:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C$$

EJERCICIO 4.23. Calcular a) $\int \frac{\cos 3x}{5 \operatorname{sen} 3x + 4} dx$ **b)** $\int 8xe^{-x^2} dx.$

SOLUCION. a) Sea $I = \int \frac{\cos 3x}{5 \operatorname{sen} 3x + 4} dx.$

Haciendo el cambio de variable $5 \operatorname{sen} 3x + 4 = t$, $15 \cos 3x \, dx = dt$, $\cos 3x \, dx = \frac{1}{15} dt$, y sustituyendo en la integral dada queda:

$$I = \frac{1}{15} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{15} \ln |t| + C = \frac{1}{15} \ln |5 \operatorname{sen} 3x + 4| + C$$

$$\int \frac{\cos 3x}{5 \operatorname{sen} 3x + 4} dx = \frac{1}{15} \ln |5 \operatorname{sen} 3x + 4| + C$$

b) Sea $I = \int 8xe^{-x^2} dx$. Haciendo el cambio de variable $-x^2 = t$, se tiene $-2x \, dx = dt$, $x \, dx = -\frac{dt}{2}$, y resulta:

$$I = -4 \int e^t \, dt = -4e^t + C = -4e^{-x^2} + C$$

$$\int 8xe^{-x^2}\,dx = -4e^{-x^2} + C$$

EJERCICIO 4.24. Calcular: a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

SOLUCION. a) Se trata de la integral de una función racional donde el denominador $Q(x) = x^4 + 1$ no tiene raíces reales.

$Q(x) = 0 \rightarrow x^4 = -1$, las raíces de $Q(x)$ son las raíces cuartas de -1, que teniendo en cuenta que en forma polar $-1 = (1, \pi)$, son:

$$z_1 = \left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$z_2 = \left(1, \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$z_3 = \left(1, \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) = \bar{z}_2$$

$$z_4 = \left(1, \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \bar{z}_1$$

La descomposición de $Q(x)$ en producto de polinomios irreducibles de $R[x]$ es entonces:

$$Q(x) = (x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

y la descomposición en fracciones simples que corresponde en este caso es:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Calculados los coeficientes indeterminados, resulta:

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad , \quad B = D = \frac{1}{2} \quad , \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

y la integral queda entonces

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \quad (1)$$

Calculemos por separado las dos integrales del segundo miembro.
Teniendo en cuenta las identidades:

$$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad ;$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

y recordando que $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$, se tiene:

$$I_1 = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx = \int \frac{-\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x - \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + C$$

$$I_2 = \int \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx = \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + C'$$

Sustituyendo en (1) los valores de I_1 e I_2 obtenidos, queda finalmente:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + K$$

donde hemos puesto $C + C' = K$.

b) Sea $I = \int \frac{dx}{1 + \cos x}$

Primer método: Multiplicando numerador y denominador del integrando por $1 - \cos x$, y teniendo en cuenta que $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, resulta:

$$I = \int \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$$

Segundo método: Recordando la relación $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, tendremos:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

EJERCICIO 4.25. Calcular: $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x}$

SOLUCION. Para resolver la integral trigonométrica propuesta, efectuaremos el cambio de variable «universal» $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, y tenemos:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2\frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

la integral queda:

$$\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{2 + \frac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

Teniendo en cuenta la identidad $t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, y recordando que $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a}$, se tiene:

$$\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C$$

EJERCICIO 4.26. Calcular: $\mathbf{I} = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

SOLUCION:

Cambio:

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t : \ x = 2 \operatorname{arctg} t$

$$dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = t^2 : \to \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = t^2\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right) \\ &\qquad\qquad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \\ &\cos^2 \frac{x}{2} t^2 = \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \to \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1 + t^2} \\ &\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t-1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C =$$

$$= \ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

EJERCICIO 4.27. Calcular: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$

SOLUCION:

$$I = \int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

cambio: $\operatorname{sen} x = t$
$\cos x\,dx = dt$

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{M}{1+t} + \frac{N}{1-t} + \frac{P}{(1+t)^2} + \frac{Q}{(1-t)^2} \Rightarrow$$

$$M(1-t)^2(1+t) + N(1+t^2)(1-t) + P(1-t)^2 + Q(1+t)^2 = 1 \quad (1)$$

Haciendo operaciones e identificando coeficientes de t^3, t^2, t y términos independientes, debe ser:

$$M = \frac{1}{4} \ ; \ N = \frac{1}{4} \ ; \ P = \frac{1}{4} \ ; \ Q = \frac{1}{4}$$

También pueden obtenerse dando en (1) los valores $t = 1$; $t = -1$; $t = 0$ y $t = 2$. Resulta:

$$I = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{1/4}{1+t}\,dx + \int \frac{1/4}{1-t}\,dt + \int \frac{1/4}{(1+t)^2}\,dt + \int \frac{1/4}{(1-t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4} L\,|1+t| - \frac{1}{4} L\,|1-t| - \frac{1}{4}(1+t)^{-1} + \frac{1}{4}(1-t)^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{4} L\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right] + C = \frac{1}{4} L\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4}\,\frac{2t}{1-t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{4} L\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{4}\,\frac{2\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} + C = \frac{1}{4} L\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + C$$

Segundo método:

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \sec^3 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x\,dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx =$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx =$$

$$= \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$\text{por partes} \begin{cases} u = \sec x & ; \quad du = \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx \\ dv = \sec^2 x\,dx & ; \quad v = \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Hemos obtenido:

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \cdot \operatorname{tg} x - \underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{I} + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

Pasando I al primer miembro y despejando, obtenemos finalmente:

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

EJERCICIO 4.28. Calcular: $\int \operatorname{sen}^2(3x)\cos(3x)\,dx$

SOLUCION:

$$\text{Cambio: } \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(3x) = t \\ \cos(3x)\cdot 3 \cdot dx = dt \end{array}\right\}$$

$$\int \operatorname{sen}^2(3x)\cos(3x)\,dx = \int t^2 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^2\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^2}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3(3x)}{9} + C$$

EJERCICIO 4.29. Calcular: $\mathbf{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$

SOLUCION. Como sugeríamos en el resumen teórico del principio del capítulo, haremos el cambio $x = \sqrt{2}\sec t$, y tenemos $dx = \sqrt{2}\sec t\operatorname{tg} t\,dt$, y

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2}\sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{2}\operatorname{tg} t,$$

luego la integral queda:

$$I = \int \sec t\, dt = \int \frac{1}{\cos t}\, dt = \int \frac{du}{\cos^2 t} = \int \frac{du}{1-\text{sen}^2 t} = \int \frac{du}{1-u^2} \quad (1)$$

$$\text{cambio:} \quad \text{sen}\, t = u \rightarrow \cos t\, dt = du$$

Planteamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \;;\; B = \frac{1}{2}$$

y volviendo a (1), tenemos:

$$I = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$$

Deshaciendo ordenadamente los cambios efectuados, queda:

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{sen}\, t}{1-\text{sen}\, t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\text{sen}\, t)^2}{\cos^2 t}\right| + C =$$

$$= \ln|\sec t + \text{tg}\, t| + C = \ln|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + k$$

donde hemos puesto $k = C - \ln\sqrt{2}$.

$$I = \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + k$$

Segundo método: Como también se indicó, la integral propuesta puede hacerse también con el cambio $\sqrt{x^2-2} = x + t$.

Elevando al cuadrado y despejando x, se obtiene

$$x = -\frac{t^2+2}{2t} \quad y \quad dx = -\frac{4t - 2t^2 - 4}{4t^2} = \frac{2-t^2}{2t^2}\, dt = -\frac{x+t}{t}\, dt$$

Por tanto

$$I = \int \frac{1}{x+t}\left(-\frac{x+t}{t}\right) dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\sqrt{x^2-2} - x| + C$$

EJERCICIO 4.30. **Calcular la integral** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

SOLUCION. Como indicamos, el cambio de variable es $x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t$

$$dx = \sqrt{3}(1 + \mathrm{tg}^2 t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} = \frac{\sqrt{3}}{\cos t}$$

y la integral queda:

$$I = \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \int \sec t\,dt = \ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t| + C$$

como ya vimos en el anterior ejercicio. Deshaciendo el cambio queda:

$$I = \ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t| + C = \ln|\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} + \mathrm{tg}\,t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right| + C$$

o sea:

$$I = \ln|\sqrt{x^2+3} + x| + k$$

donde hemos puesto $k = C - \ln\sqrt{3}$.

Capítulo V

CALCULO INTEGRAL: INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

RESUMEN TEORICO

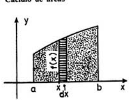
1. Cálculo de una integral definida

Regla de Barrow:

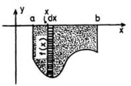
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

siendo: $F(x)' = f(x)$.

2. Cáclulo de áreas

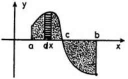


$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

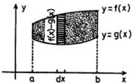


$f(x)$ es negativo ; $\int_a^b f(x)\,dx$ es negativo.

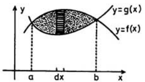
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



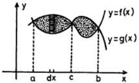
$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



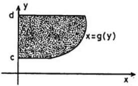
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



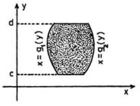
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$

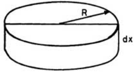


$$S = \int_c^d g(y)\,dy$$

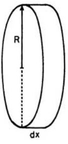


$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y))\,dy$$

3. Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



$$V = \pi R^2\,dx$$



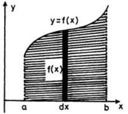
$$V = \pi R^2\,dx$$

Al girar 360° alrededor del eje OX:

El volumen generado por la pequeña franja negra es: $\pi f(x)^2\,dx$

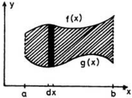
El volumen engendrado por toda la zona rayada será (integrar $\simeq$ sumar)

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f(x)^2\,dx = \pi \int_b^a f(x)^2\,dx$$



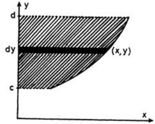
En este caso al girar 360° alrededor de OX:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx - \pi \int_a^b g(x)^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx$$



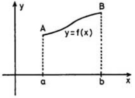
Al girar 360° alrededor del eje OY:

$$V = \pi \int_{y=c}^{y=d} x^2\, dy$$



4. Longitud de un arco de curva

La longitud del arco de la gráfica de la función $y = f(x)$ comprendida entre los puntos de abscisa $x = a$ y $x = b$ es:



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

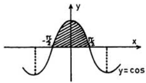
CUESTIONES

CUESTION 5.1. Regla de Barrow. Demostración. Aplicarlo al cálculo del área limitada por $y = \cos x$ y el eje de abscisas en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

SOLUCION. La regla de Barrow dice que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

La demostración de dicha regla puede encontrarse en cualquier libro.



El área de la región plana limitada por la gráfica de $y = \cos x$ y el eje de abscisas en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, viene dada por la integral:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

Teniendo en cuenta que $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$, y aplicando la regla de Barrow, resulta:

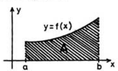
$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

CUESTION 5.2. Explica qué significa $\int_a^b f(x)\,dx$. Apoyándote en dicho significado calcula la $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$, para la función f tal que $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 7$ si $x \geqslant 0$.

SOLUCION. Del enunciado parece desprenderse que se pregunta por el significado geométrico de la integral definida de una función $f(x)$ en $[a, b]$, función que supondremos continua en $[a, b]$ y, por consiguiente, integrable Riemann en dicho intervalo.

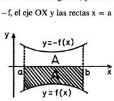
1.º) Si $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, $\int_b^a f(x)\,dx$ mide el área del recinto plano limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

$$A = \int_b^a f(x)\,dx$$

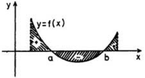


2.º) Si $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$, $\int_b^a f(x)\,dx$ es un número negativo, y si A es el área del recinto plano limitado por la gráfica de $-f$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, se tiene:

$$A = -\int_b^a f(x)\,dx$$

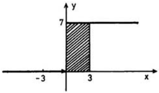


3.º) Si f(x) cambia de signo un número finito de veces en $[a, b]$, $\int_b^a f(x)\,dx$ es igual a la diferencia entre la suma de las áreas de los recintos situados en el semiplano positivo y la suma de las áreas de los recintos situados en el semiplano negativo.



La función $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -3 \leqslant x < 0 \\ 7, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$ es una función escalonada en $[-3, 3]$, y como

$$f(x) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in [-3, 3] \int_{-3}^{3} f(x) = 0(0-(-3)) + 7(3-0) = 21$$



EJERCICIOS

EJERCICIO 5.1. Calcular: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2-2}{x^2-1}\,dx$

SOLUCION:

$$I = \int \frac{x^2-2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1-1}{x^2-1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x - J$$

siendo

$$J = \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-1/2}{x+1}\,dx + \int \frac{1/2}{x-1}\,dx = \frac{-1}{2} L\,|x+1| + \frac{1}{2} L\,|x-1| + C =$$

$$= \frac{1}{2} L \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = L\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \;\Rightarrow\; A(x-1) + B(x+1) = 1$$

de donde $\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{-1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

Sustituyendo: $I = x - L\left|\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right| + C$. Por tanto:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2-2}{x^2-1}\,dx = \left[x - L\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} - L\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(L1 - L3) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} L3 = \frac{1}{2}(1 + L3)$$

EJERCICIO 5.2. Calcular $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 x\, dx$.

SOLUCION:

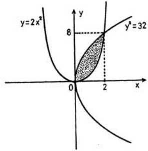
$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)\,\text{sen}\, x\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\text{sen}\, x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} -$$

$$-\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIO 5.3. Calcular el área limitada por las parábolas $y = 2x^2$ e $y^2 = 32x$.

SOLUCION. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y^2 = 32x \\ y = 2x^2 \end{cases}$, formado por las ecuaciones de las parábolas dadas, se obtienen las coordenadas de los puntos comunes a las dos curvas, resultando: $O(0, 0)$ y $P(2, 8)$.



$$A = \int_0^2 (\sqrt{32x} - 2x^2)\, dx = \left[4\sqrt{2}\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

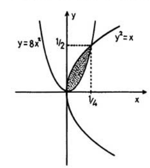
Otro procedimiento

$$A = \int_0^8 \left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{1}{32}y^2\right)dy = \left[\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}y^{3/2} - \frac{1}{32 \cdot 3}y^3\right]_0^8 = \frac{2^5}{3} - \frac{2^4}{3} = \frac{16}{3}$$

Area pedida $= \dfrac{16}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 5.4. Hallar el área del recinto acotado limitado por las gráficas de las curvas $y = 8x^2$ e $y^2 = x$.

SOLUCION. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = 8x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$, formado por las ecuaciones de las parábolas dadas, se obtiene el punto común cuya abscisa es $x = \dfrac{1}{4}$.



El área pedida es entonces:

$$A = \int_0^{1/4} (\sqrt{x} - 8x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}x^3\right]_0^{1/4} = \frac{1}{12} \text{ unidades cuadradas.}$$

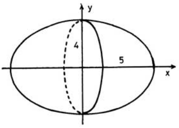
EJERCICIO 5.5. Calcular el volumen de la figura encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

al girar alrededor de su eje mayor.

SOLUCION. Recordando que el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por dicho eje, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ ($f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$) es:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$



El volumen del elipsoide de revolución engendrado en la rotación de la elipse dada alrededor de su eje mayor es:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} f(x)^2 \, dx = 2\pi \int_0^5 f(x)^2 \, dx, \quad \text{siendo} \quad y^2 = f(x)^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2)$$

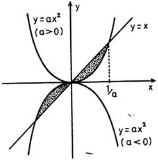
luego $V = \dfrac{32\pi}{25} \displaystyle\int_0^5 (25 - x^2) \, dx = \dfrac{32\pi}{25} \left[25x - \dfrac{x^3}{3} \right]_0^5 = \dfrac{320\pi}{3}$.

Volumen pedido: $V = \dfrac{320\pi}{3}$ unidades cúbicas.

EJERCICIO 5.6. Hallar el valor de a para que el área comprendida entre la parábola $y = ax^2$ y la recta $y = x$ sea $\dfrac{1}{24}$.

SOLUCION. Debido a la simetría, el área de la región plana comprendida entre la parábola $y = ax^2$ y la recta $y = x$ es la misma, ya sea $a > 0$ o $a < 0$. Podemos suponer entonces que $a > 0$, y la condición pedida se traduce en:

$$\int_0^{1/a} (x - ax^2) \, dx = \frac{1}{24}$$



Puesto que

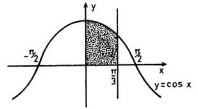
$$\int_0^{1/a} (x - ax^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^{1/a} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{6a^2},$$

debe ser $\frac{1}{6a^2} = \frac{1}{24}$, de donde

$$a = \pm 2$$

EJERCICIO 5.7. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \cos x$ y las rectas $y = 0$, y $x = \frac{\pi}{3}$.

SOLUCION. Se pide el área de la región rayada de la figura, y resulta:

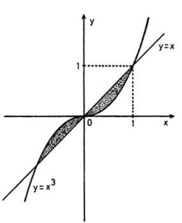


$$A = \int_0^{\pi/3} \cos x \, dx = [\text{sen}\, x]_0^{\pi/3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} - \text{sen}\, 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Area pedida $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 5.8. Area determinada por las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

SOLUCION. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases}$, formado por las ecuaciones de las dos curvas, se obtienen las coordenadas de los puntos comunes, resultando las abscisas de dichos puntos: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.



El área de la región rayada pedida es entonces:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (x - x^3)\, dx = 2\int_0^1 (x - x^3)\, dx =$$

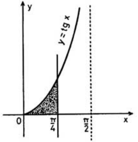
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Otro método

$$A = 2\int_0^1 (y^{1/3} - y)\,dy = 2\left[\frac{3}{4}y^{4/3} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 5.9. Calcular el área limitada por la curva $y = \operatorname{tg} x$, el eje OX y la recta $x = \frac{\pi}{4}$.

SOLUCION:



$$\text{Area pedida} = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = [-L\cos x]_0^{\pi/4} =$$

$$= -L\cos\frac{\pi}{4} + L\cos 0 = -L\frac{\sqrt{2}}{2} = L\frac{2}{\sqrt{2}} = L\sqrt{2}.$$

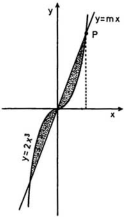
EJERCICIO 5.10. Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado entre la cúbica $y = 2x^3$ y la recta $y = mx$ sea 64 unidades de área. (Se supondrá los ejes OX y OY provistos de la misma unidad de longitud.)

SOLUCION. Sea P punto de intersección de $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = mx \end{cases}$ en el primer cuadrante:

$$2x^3 = mx \to 2x^2 = m \to x = \sqrt{\frac{m}{2}}$$

$$\text{Area rayada} = \int_0^{\sqrt{m/2}} (mx - 2x^3)\,dx = \frac{1}{2}64 = 32 \rightarrow$$

$$\left[\frac{mx^2}{2} - 2\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{m/2}} = \frac{m}{2}\cdot\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{4} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{4} = 32 \rightarrow m = 16$$



EJERCICIO 5.11. Calcular el área encerrada por $y = 9 - x^2$ e $y = x + 3$.

SOLUCION:

$9 - x^2 = 0 \quad x^2 = 9 \quad x = \pm 3$

x	$y = 9 - x^2$
−3	0
0	9
3	0

Es muy útil hallar los puntos de corte de las curvas

$$x + 3 = 9 - x^2$$

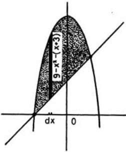
$$\begin{array}{lll} y = 9 - x^4 & x^2 + x - 6 = 0 & x = 2 \quad y = 5 \\ y = x + 3 & x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{array} & x = -3 \quad y = 0 \end{array}$$

$$S = \int_{x=-3}^{x=2} \{9 - x^2 - (x+3)\}\, dx = \int_{x=-3}^{x=2} (9 - x^2 - x - 3)\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} =$$

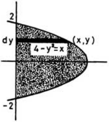
$$= \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(-18 + \frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right) = \left(10 - \frac{8}{3}\right) - \left(-9 - \frac{9}{2}\right) =$$

$$= 19 - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{114 - 16 + 27}{6} = \frac{125}{6} \text{ u.c.}$$



EJERCICIO 5.12. Calcular el área comprendida entre la parábola $x = 4 - y^2$ y el eje Y'Y.

SOLUCION. $x = 4 - y^2$ es la parábola de vértice (4, 0) y eje X'X.



$4 - y^2 = 0 \qquad y = \pm 2$

x	y
0	−2
4	0
0	2

$$S = \int_{y=-2}^{y=2} x\,dy = \int_{y=-2}^{y=2} (4 - y^2)\,dy = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ m.c.}$$

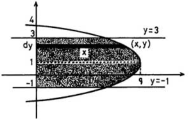
Más rápido: $S = 2\int_{y=0}^{y=2} x\,dy.$

EJERCICIO 5.13. Calcular el área comprendida entre $x = 8 + 2y - y^2$ el eje Y'Y y las rectas: $y = -1$ e $y = 3$.

SOLUCION. Puntos de encuentro con Y'Y.

$$8 + 2y - y^2 = 0 \qquad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

x	y	
0	−2	
9 ←	1	vértice.
0	4	
8 ←	0	



$$S = \int_{y=-1}^{y=3} x\,dy = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} =$$

$$= (24 + 9 - 9) - \left(8 + 1 + \frac{1}{3}\right) = 31 - \frac{1}{3} = \frac{92}{3} \text{ u.a.}$$

EJERCICIO 5.14. Calcular el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

SOLUCION. Puntos de corte de $\left\{\begin{matrix} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow 4x = (2x - 4)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$(4, 4)$ y $(1, -2)$

x	4	1	1	4
y	4	−2	+2	−4

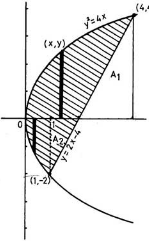
de $y^2 = 4x$

Primer método

$$\int_{x=0}^{x=4} y\,dx = \int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = 2\int_0^4 x^{1/2}\,dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{4}{3}4^{3/2} = \frac{4}{3}\sqrt{4^3} = \frac{32}{3}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} y\,dx = \int_0^1 -\sqrt{4x}\,dx = -2\int_0^1 x^{1/2}\,dx = -2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}$$

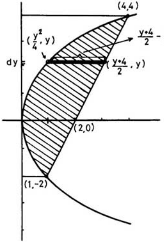
$$S = \frac{32}{3} + \frac{4}{3} - A_1 + A_2 = 12 - 4 + 1 = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$



Segundo método

$$\text{Area S} = \int_{y=-2}^{y=4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \left(4 + 8 - \frac{16}{3}\right) - \left(1 - 4 + \frac{2}{3}\right) = 9 \text{ u.c.}$$



EJERCICIO 5.15. Siendo $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, se pide determinar a y b para que, en un sistema de referencia cartesiano la curva y = f(x) pase por el punto A(−2, −6) y admita en ese punto una tangente horizontal. Calcular el área limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas x = 1, x = 2.

SOLUCION. Si la curva pasa por A(−2, 6), tenemos:

$$f(-2) = -6 \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \rightarrow 2a - b = 2 \qquad (1)$$

la condición de que la tangente en A sea horizontal implica que:

$$f'(-2) = 0 \quad \rightarrow \quad a - \frac{8}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

y sustituyendo en (1), obtenemos $\quad b = 2$

Por tanto, $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$, y el área de la región pedida es:

$$A = \int_1^2 f(x)\,dx, \quad \text{ya que} \quad f(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \in [1, 2]$$

Es decir:

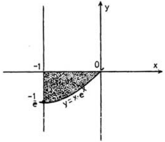
$$A = \int_1^2 \left(2x + 2 + \frac{8}{x}\right) dx = [x^2 + 2x + 8 \ln x]_1^2 = 8 \ln 2 + 5$$

$$A = 8 \ln 2 + 5 \cong 10{,}54 \text{ unidades cuadradas}$$

EJERCICIO 5.16. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = xe^x$ y las rectas: $y = 0$; $x = -1$; $x = 0$.

SOLUCION:

$$\text{Area} = \left| \int_{-1}^{0} xe^x\,dx \right| = |(xe^x - x)_{-1}^{0}| = |(-e^0) - (-1e^{-1} - e^{-1})| =$$



$$= \left|-1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right| = 1 - \frac{2}{e}$$

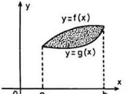
$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

$$\left|\begin{array}{l} x = u \ \rightarrow\ dx = du \\ e^x\,dx = dv \ \rightarrow\ v = e^x \end{array}\right.$$

EJERCICIO 5.17. Hallar el área del recinto limitado por las representaciones cartesianas de: $y = 5$; $y = x^2 - 4x$.

SOLUCION. En general:

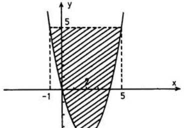
$$\text{Area pedida} = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|$$



Aqui es:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \ \rightarrow\ y = 5 \\ y = g(x) \ \rightarrow\ y = x^2 - 4x \end{array}\right\}$$

Se observa en la figura que: $y = x^2 - 4x$ es una parábola normal de vértice: $(2, -4)$ y puntos de corte con X'X en $(0, 0)$ y $(4, 0)$.



Los puntos de corte de $\left.\begin{array}{l} y = 5 \\ y = x^2 - 4x \end{array}\right\}$ son $\left\{\begin{array}{l} (-1, 5) \\ (5, 5) \end{array}\right.$. Por tanto:

$$\text{Area pedida} = \left| \int_{-1}^{5} [5 - (x^2 - 4x)]\, dx \right| = \left| \left(5x - \frac{x^3}{3} + 2x^2\right)_{-1}^{5} \right| =$$

$$= \left| \left(25 - \frac{125}{3} + 50\right) - \left(-5 + \frac{1}{3} + 2\right) \right| = \frac{108}{3} = 36 \text{ unidades cuadra-}$$

das.

EJERCICIO 5.18. Calcular el área limitada por las curvas $y = x^4 - 4x^2$; $y = 4x^2$.

SOLUCION:

Puntos de corte de $\left.\begin{cases} y = x^4 - 4x^2 \\ y = 4x^2 \end{cases}\right\} \to x^4 - 8x^2 = 0 \quad x^2(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2}. \end{cases}$

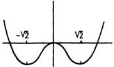
$\downarrow$

$(0, 0)$; $(2\sqrt{2}, 32)$; $(-2\sqrt{2}, 32)$.

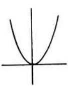
Representación de $y = x^4 - 4x^2 = x^2(x - 2)(x + 2)$.

x	3	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{2}$	-3
y	45	32	0	0	0	32	45

$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$



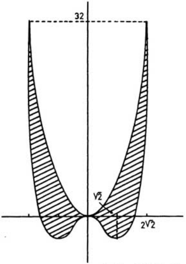
Representación de $y = 4x^2$



$$\text{Area} = S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} [4x^2 - (x^4 - 4x^2)]\,dx = 2\int_0^{2\sqrt{2}} (8x^2 - x^4)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{8x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{2\sqrt{2}} = 2\left[\frac{2^3\cdot 2^3\cdot 2\sqrt{2}}{3} - \frac{2^5\cdot 2^2\sqrt{2}}{5}\right] =$$

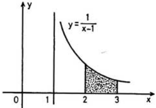
$$= 2^8\sqrt{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2^8\cdot\sqrt{2}\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2^9\sqrt{2}}{15}\ \text{u.c.}$$



MINIMOS $(-\sqrt{2}, -4)$ $(\sqrt{2}, -4)$

EJERCICIO 5.19. Representar la función $y = \dfrac{1}{x-1}$ cuando $x \in [2, 3]$ y calcular el área limitada por esta curva y las rectas $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$.

SOLUCION. La curva $y = \dfrac{1}{x-1}$ es una rama de hipérbola equilátera de asíntotas $x = 1$; $y = 0$.

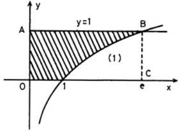


$$\text{Para} \begin{cases} x = 2 & y = 1 \\ x = 3 & y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Area} = S = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx = [\ln|x-1|]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

EJERCICIO 5.20. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \ln x$ e $y = 1$ y los ejes de coordenadas.

SOLUCION:



Se pide el área S del recinto rayado

$$S = \text{área del rectángulo OABC} - \text{área de la región (1)} = e - \int_1^e \ln x\,dx$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} \text{por partes:} \\ u = \ln x \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \quad ; \quad v = x \end{matrix}\right| = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$$

Por consiguiente: $S = e - 1$ unidades cuadradas.

Otro procedimiento:

$$y = \ln x \ \rightarrow \ x = e^y$$

$$S = \int_0^1 x\, dy = \int_0^1 e^y\, dy = [e^y]_0^1 = e - 1 \text{ unidades de superficie.}$$

EJERCICIO 5.21. Calcular el área de la zona del plano limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $f(x) = x\sqrt{1 - x}$, entre los puntos en que la gráfica corta al eje mencionado.

SOLUCION. Aprovecharemos el ejercicio para dibujar la gráfica de la función $f(x) = x\sqrt{1 - x}$.

- Está definida en $(-\infty, 1]$, y es continua.
- $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 1$, o sea, corta al eje x en los puntos $O(0, 0)$ y $P(1, 0)$. $f(0) = 0 \rightarrow$ corta al eje y en el origen.

$$\text{signo de } f(x): \quad \begin{array}{ccccc} & f < 0 & & f > 0 & \\ \hline & & 0 & & 1 \end{array}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$
- $f'(x) = \sqrt{1 - x} + \dfrac{-x}{2\sqrt{1 - x}} = \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}.$

  Puesto que $f'_-(1) = -\infty$, la tangente en $P(1, 0)$ es vertical, esto es, la recta $x = 1$.

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{2}{3}.$

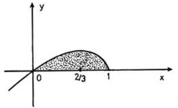
$$\text{signo de } f'(x): \quad \begin{array}{ccccc} & f' > 0 & & f' < 0 & \\ \hline & \nearrow & \frac{2}{3} & \searrow & 1 \end{array} \qquad x = \frac{2}{3} \text{ es máximo local.}$$

En el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$ la función es estrictamente creciente, y estrictamente decreciente en el $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right]$.

- $f''(x) = \dfrac{3x - 4}{4(1 - x)^{3/2}}$

  $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 1)$, luego la curva es cóncava en todo su dominio.

La gráfica de la función es:



Se pide el área de la región rayada, y es:

$$S = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_1^0 (1-t^2)\cdot t\cdot(-2t)\,dt = 2\int_0^1 (t^2 - t^4)\,dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

Cambio: $1 - x = t^2$ $\begin{cases} \text{si } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ \text{si } x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$

$dx = -2t\,dt$

$$A = \frac{4}{15} \text{ unidades cuadradas.}$$

EJERCICIO 5.22. Se considera la función $f(x) = L(x^2 + a)$, siendo a un número real. Precisar, según los valores de a, los intervalos de existencia de la función f(x) y límite de f(x) cuando $x \rightarrow -\infty$. Calcular, en el caso $a = 0$, el área del conjunto de puntos cuyas coordenadas verifican

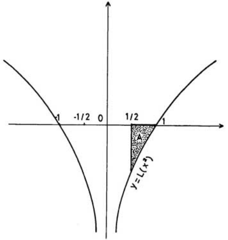
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \quad : \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

SOLUCION. La función logaritmo neperiano sólo está definida para valores estrictamente positivos. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{si} \quad a < 0 \quad & D(f) =]-\infty, -\sqrt{-a}[\, \cup\,]\sqrt{-a}, +\infty[\\ a = 0 \quad & D(f) = R \sim \{0\} \\ a > 0 \quad & D(f) = R. \end{aligned}$$

$\lim_{x \to -\infty} L(x^2 + a) = +\infty.$

Area pedida $A = \left| \int_{1/2}^{1} L(x^2)\, dx \right|$



Sea $I = \int Lx^2\, dx$

$$\text{Por partes:} \quad \begin{array}{ll} u = Lx^2 & \to du = \frac{2x}{x^2} dx = \frac{2}{x} dx \\ dv = dx & \to v = x \end{array}$$

$$I = xLx^2 - \int x \cdot \frac{2}{x} dx = xLx^2 - \int 2\, dx = xLx^2 - 2x + C.$$

Por tanto:

$$A = \left| \int_{1/2}^{1} Lx^2\, dx \right| = |[xLx^2 - 2x]_{1/2}^{1}| = \left| (1L1 - 2) - \left(\frac{1}{2} L \frac{1}{4} - 1 \right) \right| =$$

$$= \left| -2 + 1 - \frac{1}{2} L \frac{1}{4} \right| = |-1 + L^2| = 1 - L2.$$

EJERCICIO 5.23. Estudiar y dibular la curva $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ y hallar b (b > 3) tal que el área comprendida entre la curva, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 3$ y $x = b$, sea $\ln\sqrt[4]{(b+2)^3}$.

SOLUCION:

1. *Representación gráfica de* $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

- Dominio de definición $C(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
- $f(x) = 0 \to x = 1$, luego corta al eje x en el punto $P(1, 0)$.

  $f(0) = \dfrac{1}{4} \to$ corta al eje y en el puntò $Q\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.

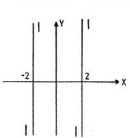
  Signo de f(x): $\underset{}{\overset{f<0}{\quad}} \;-2\; \overset{f>0}{\quad} \;1\; \overset{f<0}{\quad} \;2\; \overset{f>0}{\quad}$.

- Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asintotas verticales, y puesto que

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to (-2)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

La posición de la curva respecto de las asintotas es



- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, luego la recta $y = 0$ (eje x) es una asintota vertical, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.
- $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - 2x(x-1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) < 0$ para todo x del dominio de definición, luego la función es estrictamente decreciente en todo su dominio.

- Calculando $f''(x)$ resulta: $f''(x) = 2\dfrac{x^3 - 3x^2 + 12x - 4}{(x^2 - 4)^3}$.

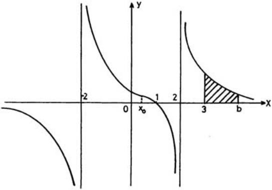
Teniendo en cuenta que el numerador $D = x^3 - 3x^2 + 12x - 4$, tiene distinto signo para $x = 0$ que para $x = 1$, deducimos que existe una raíz de $D = 0$ comprendida entre 0 y 1, es decir, existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

El signo de la segunda derivada es

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\cap$	-2	$\cup$	x_0	$\cap$	2	$\cup$

$x = x_0$ punto de inflexión convexo-cóncavo.

La gráfica de la función es:



2. Area

El área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 3$ y $x = b$ $(b > 3)$ es:

$$S = \int_3^b f(x)\,dx = \int_3^b \frac{x - 1}{x^2 - 4}\,dx.$$

Calculada una primitiva de f(x) resulta

$$\int \frac{x-1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}(3\ln|x+2| + \ln|x-2|) + C,$$

y aplicando la regla de Barrow es:

$$S = \frac{1}{4}[3\ln|x+2| + \ln|x-2|]_3^b = \frac{1}{4}[3\ln(b+2) + \ln(b-2) - 3\ln 5]$$

Para calcular el valor de b tenemos que resolver la ecuación S = T, siendo

$$T = \ln\sqrt[4]{(b+2)^3} = \frac{3}{4}\ln(b+2)$$

$$S = T \rightarrow 3\ln(b+2) + \ln(b-2) - 3\ln 5 = 3\ln(b+2);$$

$$\ln(b-2) - 3\ln 5 = 0 \rightarrow \ln\frac{b-2}{125} = 0 \rightarrow \frac{b-2}{125} = 1,$$

de donde

$$b = 127$$

EJERCICIO 5.24. Calcular el área encerrada por la función $f(x) = x^2e^{-x}$ y el semieje positivo OX.

SOLUCION. Construyamos detalladamente la gráfica de la función

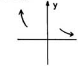
$$f(x) = x^2e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

- Su dominio de definición son todos los reales: $D(f) = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$ y $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
  $f(0) = 0$. Corta a los ejes sólo en el origen de coordenadas.
- Es una función continua en todo $\mathbb{R}$, luego no tiene asíntotas verticales.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ = (aplicando dos veces la regla de L'Hôpital) = 0, luego la recta $y = 0$ (eje coordenado OX) es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^x} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } x \to -\infty \\ 0, & \text{si } x \to +\infty \end{cases}.$$

No tiene asíntotas oblicuas, sino que:

- Rama parabólica en la dirección del eje x, cuando $x \to +\infty$.
- Rama parabólica en la dirección del eje y, cuando $x \to -\infty$.



- $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$

  $f'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

  Signo de f'(x): $\begin{array}{ccccc} f' < 0 & & f' > 0 & & f' < 0 \\ \searrow & 0 & \nearrow & 2 & \searrow \end{array}$ $\quad$ $x = 0$ mínimo local, $x = 2$ máximo local

- $f''(x) = e^{-x}(2 - x) - xe^{-x}(2 - x) - xe^{-x} = e^{-x}[x^2 - 4x + 2]$.

  Puesto que $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, las soluciones de $f''(x) = 0$ son las de la ecuación

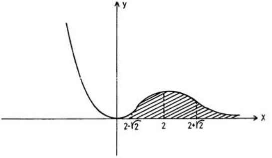
  $x^2 - 4x + 2 = 0 \to \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

  Signo de f''(x): $\begin{array}{ccccc} f'' > 0 & & f'' < 0 & & f'' > 0 \\ \cup & 2 - \sqrt{2} & \cap & 2 + \sqrt{2} & \cup \end{array}$

  $x = 2 - \sqrt{2}$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo.

  $x = 2 + \sqrt{2}$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

Con toda la información obtenida concluimos que la gráfica de $y = f(x)$ es:



Se pide el área de la región rayada. Puesto que la función $f(x) = x^2e^{-x}$ es integrable en $[0, a]$, para cada $a > 0$, el área buscada es:

$$A = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$$

Para calcular $\int_0^a f(x)\,dx$, con $a > 0$, calculemos la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ y apliquemos la regla de Barrow.

$$\int f(x)\,dx = \int x^2e^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} \text{por partes:} & \\ u = x^2 & ; \quad du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx & ; \quad v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \qquad (1)$$

$$\int xe^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} \text{por partes:} & \\ u = x & ; \quad du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx & ; \quad v = e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

llevado este último resultado a (1), obtenemos:

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + C.$$

Por consiguiente:

$$A = \lim_{a\to+\infty} -\left[\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}\right]_0^a = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{a^2 + 2a + 2}{e^a} + 2\right) =$$

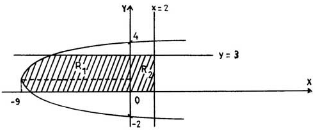
$$= 2 - \lim_{a\to+\infty} \frac{a^2 + 2a + 2}{e^a} = 2 - 0 = 2$$

donde el último límite puede calcularse aplicando dos veces la regla de L'Hôpital, o bien, recordando que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio cuando $x \to +\infty$.

$A = 2$ unidades cuadradas

EJERCICIO 5.25. Calcular el área encerrada por la curva $x = y^2 - 2y - 8$ y las rectas $y = 0$, $y = 3$ y $x = 2$.

SOLUCION. Recordando que $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, es la ecuación de una parábola de vértice $A(x_0, y_0)$ y eje paralelo al eje OY, tenemos que escribiendo la ecuación $x = y^2 - 2y - 8$ en la forma $(y - 1)^2 = 2\frac{1}{2}(x + 9)$, la curva dada es una parábola de vértice $A(-9, 1)$ y eje la recta $y = 1$.



Se pide el área de la región rayada, y para calcularla la descomponemos en las regiones R_1 y R_2.

Area región $R_2 = 6$ unidades de superficie.

Area región $R_1 = -\int_0^3 x\,dy = -\int_0^3 (y^2 - 2y - 8)\,dy =$

$$= -\left[\frac{y^3}{3} - y^2 - 8y\right]_0^3 = 24 \text{ u.s.}$$

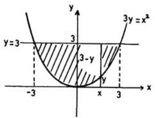
El área pedida es entonces $A = 6 + 24 = 30$ unidades de superficie.

EJERCICIO 5.26. Calcular el volumen generado al girar 360° alrededor de la recta $y = 3$ la superficie encerrada entre las curvas $3y = x^2$ e $y = 3$. Calcular también el volumen generado por dicha superficie al girar 360° alrededor del eje X'X.

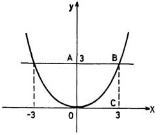
SOLUCION. La superficie encerrada entre las curvas $y = x^2/3$ y la recta $y = 3$ es el recinto plano rayado de la figura, y el volumen del cuerpo engendrado en la revolución de dicha superficie alrededor de la recta $y = 3$ es:

$$V = \int_{-3}^{3} \pi(3 - y)^2\,dx = 2\pi \int_0^3 \left(3 - \frac{x^2}{3}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^3 \left(9 - 2x^2 + \frac{x^4}{9}\right) dx =$$

$$= 2\pi\left[9x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{45}\right]_0^3 = 2\pi\left(27 - 18 + \frac{27}{5}\right) = \frac{144\pi}{5} \text{ u. de vol.}$$



La mitad del volumen del cuerpo engendrado en la revolución de la superficie alrededor del eje OX es la diferencia entre el volumen del cilindro engendrado en la revolución del rectángulo OABC, y el volumen del cuerpo engendrado en la revolución del recinto plano limitado por la gráfica de $y = x^2/3$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.



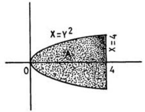
$$\frac{1}{2}V = \pi 3^2 \cdot 3 - \int_0^3 \pi \frac{x^2}{3} dx = 27\pi - \pi\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^3 = 24\pi \text{ unidades de volumen.}$$

Por tanto, el volumen pedido es $V = 48\pi$ unidades de volumen.

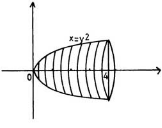
EJERCICIO 5.27. Area del recinto limitado por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 4$. Volumen barrido por el recinto al girar una vuelta alrededor del eje OX.

SOLUCION:

$$\text{Area pedida} = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$



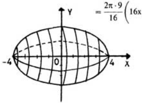
$$\text{Volumen pedido} = V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$



EJERCICIO 5.28. Calcular el volumen limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ al girar una vuelta alrededor del eje de abscisas.

SOLUCION:

$$\text{Volumen pedido} = \pi\int_{-4}^4 y^2\,dx \equiv 2\pi\int_0^4 y^2\,dx = 2\pi\int_0^4 \frac{9}{16}(16 - x^2)\,dx =$$



$$= \frac{2\pi \cdot 9}{16}\left(16x - \frac{x^3}{3}\right)_0^4 = \frac{9\pi}{8}\left(16 \cdot 4 - \frac{64}{3}\right) = 18\pi\left(4 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{18\pi(8)}{3} = 48\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

EJERCICIO 5.29. Calcular los siguientes volúmenes de revolución:

a) Generado por rotación alrededor del eje x del área del primer cuadrante limitada por la parábola: $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$.

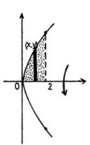
b) Generado al girar el área limitada por $y^2 = 8x$ y $x = 2$, alrededor de la recta $x = 2$.

c) Generado al girar alrededor del eje y, el área limitada por $y^2 = 8x$ y $x = 2$.

SOLUCION

a)

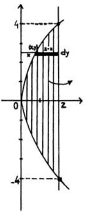
x	y
2	−4
0	0
2	4



$$V = \pi \int_{x=0}^{x=2} y^2\,dx = \pi \int_0^2 8x\,dx = 4\pi[x^2]_0^2 = 16 \text{ u.v.}$$

b)

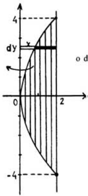
$$V = \pi \int_{y=-4}^{y=4} (2 - x)^2\,dy = 2\pi \int_{y=0}^{y=4} (2 - x)^2\,dy = 2\pi \int_{y=0}^{y=4} \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy =$$



$$= 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{64}\right) dy = 2\pi \left[4y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{320}\right]_0^4 =$$

$$= 2\pi\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{2^{10}}{2^6 \cdot 5}\right) = 2\pi\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{5}\right) = \frac{256\pi}{15} \text{ u.v.}$$

c)



$$V = \pi \int_{y=-4}^{y=4} 2^2\, dy - \pi \int_{y=-4}^{y=4} x^2\, dy$$

o de golpe:

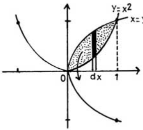
$$V = \pi \int_{y=-4}^{y=4} (4 - x^2)\, dy = \pi \int_{y=-4}^{y=4} \left(4 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2\right) dy =$$

$$= \pi \int_{y=-4}^{y=4} \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy = 2\pi \int_{y=0}^{y=4} \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy =$$

$$= 2\pi\left[4y - \frac{y^5}{64 \cdot 5}\right]_0^4 = 2\pi\left[16 - \frac{2^{10}}{2^6 \cdot 5}\right] = 2\pi\, \frac{16 \cdot 4}{5} = \frac{128\pi}{5}$$

EJERCICIO 5.30. Calcular el volumen generado por el área comprendida entre las curvas $\begin{Bmatrix} y = x^2 \\ x = y^2 \end{Bmatrix}$ al girar alrededor del eje X.

SOLUCION:



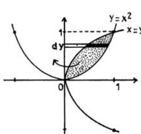
$$V = \pi \int_{x=0}^{x=1} y_1^2 \, dx - \pi \int_{x=0}^{x=1} y_2^2 \, dx = \pi \int_{x=0}^{x=1} (x - x^4) \, dx =$$

$$\text{siendo } x = y_1^2 \quad , \quad y_2 = x^2$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} \text{ u.v.}$$

EJERCICIO 5.31. Calcular el volumen generado por el área del ejercicio anterior, girando alrededor del eje Y.

SOLUCION:



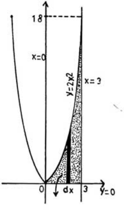
$$V = \pi \int_{y=0}^{y=1} x_1^2\,dy - \pi \int_{y=0}^{y=1} x_2^2\,dy = \pi \int_{y=0}^{y=1} (y - y^4)\,dy =$$

siendo $y = x_1^2$, $x_2 = y^2$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10} \text{ u.v.}$$

EJERCICIO 5.32. Calcular el volumen generado por el área limitada por: $y = 2x^2$; $y = 0$; $x = 3$ girando alrededor del eje X.

SOLUCION:



$$V = \pi \int_{x=0}^{x=3} y^2\,dx = \pi \int_0^3 4x^4\,dx =$$

$$= 4\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{972\pi}{5} \text{ u.v.}$$

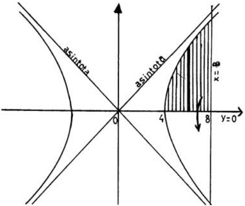
EJERCICIO 5.33. Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje x, el área encerrada por la hipérbola: $x^2 - y^2 = 16$: $y = 0$ y $x = 8$.

SOLUCION:

$$V = \pi \int_{x=4}^{x=8} y^2\,dx = \pi \int_{x=4}^{x=8} (x^2 - 16)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - 16x\right]_4^8 =$$

$y = +\sqrt{x^2 - 16}$

$$= \pi\left[\left(\frac{512}{3} - 128\right) - \left(\frac{64}{3} - 64\right)\right] = \frac{256\pi}{3} \text{ u.v.}$$

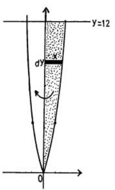


EJERCICIO 5.34. Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje Y el área limitada por $y = 4x^2$; $x = 0$; $y = 12$.

SOLUCION:

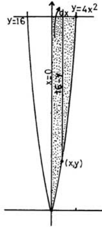
$$V = \int_{y=0}^{y=12} \pi x^2\, dy = \pi \int_{y=0}^{y=12} \frac{y}{4} dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{12} = \frac{\pi 12^2}{8} = 18\pi \text{ u.v.}$$



EJERCICIO 5.35. Calcular el volumen generado, al girar alrededor del eje $y = 16$, el área limitada por: $y = 4x^2$; x^{40}; $x = 0$; $y = 16$.

SOLUCION:



$$V = \pi \int_{x=0}^{x=2} (16-y)^2 \, dx = \pi \int_{x=0}^{x=2} (16-4x^2)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^2 (256 - 128x^2 + 16x^4) \, dx =$$

$$= \pi \left[256x - \frac{128x^3}{3} + \frac{16x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{4.096\pi}{15} \text{ u.v.}$$

EJERCICIO 5.36. Calcular la longitud del arco de curva $f(x) = \sqrt{x^3}$ comprendido entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCION. $L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$ da la longitud de arco pedida.

$$f(x) = x^{3/2} \quad ; \quad f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \rightarrow f'(x)^2 = \frac{9}{4} x.$$

Por tanto:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \, dx = \frac{8}{9} \int_1^{\sqrt{13}/2} t^2 \, dt = \frac{8}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{13}/2} = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right)$$

$$\text{Cambio:} \quad 1 + \frac{9}{4}x = t^2 \rightarrow \begin{cases} \text{si} \quad x = 0 \rightarrow t = 1 \\ \text{si} \quad x = 1 \rightarrow t = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{9}{4}dx = 2t\,dt$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) \text{ unidades}$$

EJERCICIO 5.37. Calcular $\int x^2 \ln x\,dx$. Obtener $a > 0$ de manera que el área comprendida entre la curva $y = x^2 \ln x$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = a$, sea $(2e^3 + 1)/9$.

SOLUCION:

1) Resolvemos la integral $I = \int x^2 \ln x\,dx$ por partes

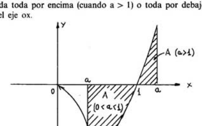
$$u = \ln x \quad ; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2\,dx \quad ; \quad v = \frac{x^3}{3}$$

y tenemos:

$$I = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$$

2) La función $f(x) = x^2 \ln x$ está definida por $x > 0$. Es positiva para $x \in (1, +\infty)$ y negativa para $x \in (0, 1)$. Puesto que $a > 0$, la curva entre $x = 1$ y $x = a$ queda toda por encima (cuando $a > 1$) o toda por debajo (cuando $a < 1$) del eje ox.



El área comprendida entre la gráfica de la función, el eje ox y las rectas x = 1 y x = a es:

a) Si $0 < a < 1$, $A = -\int_a^1 x^2 \ln x \, dx = -\left[\frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1)\right]_a^1$

$$A = -\frac{1}{9}(1 + a^3(3 \ln a - 1))$$

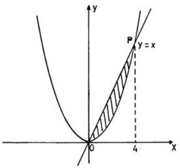
b) Si $a > 1$, $A = \int_1^a x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1)\right]_1^a$

$$A = \frac{1}{9}(1 + a^3(3 \ln a - 1))$$

Para que $A = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$, basta tomar $a = e$

EJERCICIO 5.38. Calcular el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2/4$ y la recta $y = x$. Calcular asimismo el volumen generado por dicho recinto al girar 360° alrededor del eje ox.

SOLUCION:



Determinemos en primer lugar los puntos comunes a la parábola y a la recta.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2/4 \\ y = x \end{array}\right\} x = \frac{x^2}{4} \quad ; \quad x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 4$$

Los puntos de corte son el origen $O(0, 0)$ y $P(4, 4)$.

1) El área pedida corresponde a la rayada en la figura, y vale:

$$A = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

2) El volumen pedido es:

$$v = \pi \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{80}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{15} \text{ unidades cúbicas.}$$

Capítulo VI
CALCULO DE PROBABILIDAD

CUESTIONES

CUESTION 6.1. Deducir una fórmula para calcular $P(A \cup B \cup C)$.

SOLUCION. Si $(\Omega, P(\Omega))$ es un espacio probabilizable y P es una probabilidad, sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, siendo A y B elementos de $P(\Omega)$, es decir, sucesos del experimento aleatorio.

Aplicando dos veces esta relación, tenemos:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P(A \cup B) \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la relación al último sumando, se tiene:

$$P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

luego queda finalmente:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

CUESTION 6.2. Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio. Se consideran los siguientes sucesos:

E_1 = al menos dos de los sucesos A, B, C ocurren.

E_2 = exactamente dos de los sucesos A, B, C ocurren.

E_3 = no más de dos sucesos A, B, C ocurren.

Expresar E_1, E_2 y E_3 en función de A, B, C.

SOLUCION:

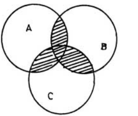


Diagrama 1

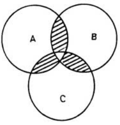


Diagrama 2

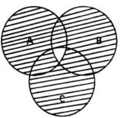


Diagrama 3

E_1 está representado por la parte rayada del diagrama 1, y expresado en función de A, B, C, es:

$$E_1 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

E_2 corresponde a la parte rayada del diagrama 2, y es:

$$E_2 = E_1 - (A \cap B \cap C) = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap (\overline{A \cap B \cup C}) =$$
$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$$

E_3 es el suceso representado por la parte rayada del diagrama 3, y expresado en términos de A, B, C, es:

$$E_3 = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = (A \cup B \cup C) \cap (\overline{A \cap B \cap C}) =$$
$$= (A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$$

EJERCICIOS

EJERCICIO 6.1. Se escogen al azar tres lámparas entre 15, de las cuales 5 son defectuosas. Hallar la probabilidad de que:

a) Ninguna sea defectuosa.
b) Una exactamente sea defectuosa.
c) Una por lo menos sea defectuosa.

SOLUCION. Se dispone de una muestra de 15 lámparas de las que 5 son defectuosas y 10 correctas, y se extraen 3 lámparas al azar. Si designamos dicha muestra por:

$$L = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, C_1, ..., C_{10}\}$$

donde D_i $(i = 1, ..., 5)$, son las defectuosas y C_i $(i = 1, ..., 10)$ las correctas, el espacio muestral está formado por los subconjuntos de tres elementos de L, luego tiene $\binom{15}{3}$ elementos.

a) Llamando A al suceso «Ninguna de las tres lámparas es defectuosa», será:

$$P(A) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} = 0{,}2637$$

b) Sea B el suceso «Una exactamente es defectuosa». Puesto que los subconjuntos de tres elementos de L que tienen exactamente una lámpara defectuosa son $5 \cdot \binom{10}{2}$, será:

$$P(B) = \frac{5 \cdot \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91} = 0{,}4945$$

c) Se pide la probabilidad del suceso contrario del suceso A del primer apartado, luego será:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2637 = 0{,}7363$$

EJERCICIO 6.2. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 rojas y otra urna tiene 7 blancas y 5 rojas. Se saca una bola de la primera urna y se introduce en la segunda. Se extrae una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

SOLUCION. Llamemos:

A_1 = «La bola pasada de la primera a la segunda urna es blanca».
A_2 = «La bola pasada de la primera a la segunda urna es roja».
B = «La bola extraída de la segunda urna es roja».

La probabilidad pedida es:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)$$

Si se verifica A_1, la composición de la segunda urna es: 8 bolas blancas y 5 rojas, luego $P(B/A_1) = \frac{5}{13}$, y si se verifica el suceso A_2, la composición de dicha urna es: 7 bolas blancas y 6 rojas, luego $P(B/A_2) = \frac{6}{13}$. Además $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ y $P(A_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Por consiguiente, tenemos:

$$P(B) = \frac{5}{13}\frac{2}{5} + \frac{6}{13}\frac{3}{5} = \frac{28}{65}$$

EJERCICIO 6.3. La probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5, 6 en un dado cargado es proporcional a 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente. Hallar:

a) La probabilidad de obtener un 4 en un lanzamiento.
b) La probabilidad de obtener número par en un lanzamiento.

SOLUCION. Si llamamos A_i al suceso «Sacar i en un lanzamiento», del enunciado se tiene que $P(A_i) = ki$ y, puesto que es

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$$

se tiene $21k = 1$, luego $k = \frac{1}{21}$.

a) $P(A_4) = \frac{4}{21}$.

b) El suceso «sacar par en un lanzamiento» es $A_2 \cup A_4 \cup A_6$, y se tiene:

$$P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

EJERCICIO 6.4. Para realizar un examen que consiste en contestar un tema elegido al azar entre 20 se presentan dos alumnos. El X conoce 16 temas e ignora los otros cuatro. El Y conoce 6 temas únicamente, ignorando los restantes.

Se realiza el examen y aprueba sólo uno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el X?

SOLUCION. El espacio muestral correspondiente a esta experiencia es

$$\Omega = \{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{XY}\},$$

donde hemos designado:

XY el resultado que se verifica si aprueban X e Y.

$X\overline{Y}$ el resultado que se verifica si aprueba X y suspende Y.

$\overline{X}Y$ el resultado que se verifica si suspende X y aprueba Y.

$\overline{XY}$ el resultado que se verifica si suspenden X e Y.

Si A es el suceso «aprueba sólo uno de ellos», será $A = \{X\overline{Y}, \overline{X}Y\}$, y

$$P(A) = P(X\overline{Y}) + P(\overline{X}Y) = \frac{16}{20}\frac{14}{20} + \frac{4}{20}\frac{6}{20} = \frac{248}{400}$$

$B = \{XY, X\overline{Y}\}$ es el suceso «aprueba X», y se pide P(B/A).

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(X\overline{Y})}{P(A)} = \frac{\frac{16}{20}\frac{14}{20}}{\frac{248}{400}} = \frac{28}{31}$$

EJERCICIO 6.5. En una clase de COU hay 22 alumnos y 18 alumnas y se hace un sorteo para regalar dos libros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que correspondan a dos alumnos varones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que correspondan a un alumno y a una alumna? (es indistinto el orden).
c) ¿Cuál es la probabilidad de que correspondan a dos alumnas?
d) Por qué la suma de las tres probabilidades anteriores es igual a 1?

SOLUCION. El conjunto de resultados posibles de la experiencia (espacio muestral) es $\Omega = \{VV, VH, HH\}$, donde designamos:

VV al resultado en que los dos libros corresponden a dos alumnos varones.

VH al resultado en que corresponden a un alumno y a una alumna.

HH al resultado en que corresponden a dos alumnas.

Se pide:

a) $P(VV) = \dfrac{\binom{22}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{231}{780}$. b) $P(VH) = \dfrac{22 \cdot 18}{\binom{40}{2}} = \dfrac{396}{780}$.

c) $P(HH) = \dfrac{\binom{18}{2}}{\binom{40}{2}} = \dfrac{153}{780}$.

d) $P(VV) + P(VH) + P(HH) = 1$, pues es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que componen el espacio muestral.

En general, si

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } A_i \cap A_j = \phi \text{ si } i \neq j \ (i, j = 1, 2, 3, ..., n),$$

entonces:

$$1 = P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

EJERCICIO 6.6. De una urna con 6 bolas blancas y 4 rojas se extraen tres bolas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ninguna bola roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja y dos blancas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas rojas y una blanca?
d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres bolas rojas?
e) ¿Por qué la suma de los cuatro resultados anteriores es uno?

SOLUCION. Del enunciado se desprende que las tres bolas se extraen simultáneamente. El espacio muestral correspondiente a esta experiencia es:

$\Omega = \{BBB, BBR, BRR, RRR\}$, donde designamos:

BBB el suceso que se verifica cuando las tres bolas extraidas son blancas.
BBR el suceso que se verifica cuando dos bolas son blancas y una roja.
BRR el suceso que se verifica cuando una bola es blanca y dos rojas.
RRR el suceso que se verifica cuando las tres bolas son rojas.

Se pide:

a) $P(BBB) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{6}$ b) $P(BBR) = \dfrac{\binom{6}{2} \cdot 4}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(BRR) = \dfrac{6 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{3}{10}$ d) $P(RRR) = \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{10}$

e) Al igual que en el ejercicio anterior, la suma de los cuatro resultados es uno, pues es la suma de las probabilidades de sucesos incompatibles cuya unión es todo el espacio muestral.

EJERCICIO 6.7. Un libio y un americano deciden dirimir sus problemas jugando a la «ruleta del desierto». En un saco hay 18 serpientes negras de Australia, 32 serpientes de cascabel y 10 serpientes arlequín, todas ellas venenosísimas. Para que resulten mortales han de picar dos de la misma especie. Si el americano (del norte, claro) o el libio meten la mano en el saco, ¿qué probabilidad tienen de morir?

SOLUCION. En el enunciado se ha puesto buen cuidado en advertir de la peligrosidad de las serpientes e incluso de su procedencia, además de amenizarlo con algunas bromas para que resulte más divertido (?). Pero pese a todo el esfuerzo y al ropaje literario del mismo, éste resulta ambiguo.

Nosotros vamos a suponer que al introducir la mano en el saco se reciben exactamente dos picaduras, y calcularemos entonces la probabilidad de que éstas sean producidas por dos serpientes de la misma clase.

Sean los sucesos:

A = «pican dos australianas negras».
B = «pican dos de cascabel».
C = «pican dos serpientes arlequín».

Se pide entonces la probabilidad del suceso $A \cup B \cup C$, que al ser la unión de sucesos incompatibles dos a dos, se tiene:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{60}{2}} + \frac{\binom{32}{2}}{\binom{60}{2}} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{694}{1.770}$$

EJERCICIO 6.8. ¿Cuál es la probabilidad de acertar 5 números y el complementario en la lotería primitiva? ¿Y la de acertar los seis números?

SOLUCION. Recordemos que el resultado de la lotería primitiva es una combinación ganadora, formada por un subconjunto de seis elementos del conjunto formado por los 49 primeros números naturales, más un número complementario de entre los 43 números restantes.

El número de resultados posibles es $\binom{49}{6} \cdot 43$, ya que hay $\binom{49}{6}$ posibles combinaciones ganadoras, y cada una de ellas puede venir acompañada por cada uno de los 43 números restantes como número complementario.

Hecha una apuesta $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, para que acierta 5 números y el complementario, la combinación ganadora debe estar formada por 5 de dichos números más un sexto número distinto de los A_i, y el número complementario es el número de la apuesta distinto de los 5 acertados. Por consiguiente, si A es el suceso «acertar 5 números y el complementario», el número de resultados que favorecen la realización de A es $\binom{6}{5} \cdot 43$. Por tanto:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{5} \cdot 43}{\binom{49}{6} \cdot 43} = \frac{6}{\binom{49}{6}}$$

Si B es el suceso «acertar los seis números», es claro que $P(B) = \dfrac{1}{\binom{49}{6}}$.

EJERCICIO 6.9. John MacHarra, el mejor encestador de la NBA, encesta desde la línea de 6,25, con una probabilidad 0,8. Calcular la probabilidad de que en seis lanzamientos sucesivos:

a) Enceste la mitad de los lanzamientos.

b) Enceste por lo menos la mitad de los lanzamientos.

c) Enceste como máximo la mitad de los lanzamientos.

SOLUCION. Dado un experimento aleatorio con dos resultados posibles que llamaremos «éxito» y «fracaso», recordemos que la probabilidad de k éxitos en la repetición independiente de n veces dicha prueba, cuando la probabilidad de éxito en cada prueba es p, es:

$$P(\text{k éxitos en n pruebas}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En el problema que nos ocupa, consideramos éxito el encestar un lanzamiento desde la línea de 6,25, cuya probabilidad es p = 0,8; y llamemos X a la variable aleatoria que da el número de encestes (éxitos) en 6 lanzamientos sucesivos desde la línea de 6,25. Tendremos:

a) $P(X = 3) = \binom{6}{3}(0{,}8)^3(0{,}2)^3.$

b) Sea A el suceso «encestar por lo menos la mitad de los lanzamientos»

$$P(A) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{3}(0{,}8)^3(0{,}2)^3 + \binom{6}{4}(0{,}8)^4(0{,}2)^2 + \binom{6}{5}(0{,}8)^5 0{,}2 + (0{,}8)^6$$

c) Sea B el suceso «encestar como máximo la mitad de los lanzamientos»

$$P(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{6}{0}(0{,}2)^6 + \binom{6}{1}(0{,}8)(0{,}2)^5 + \binom{6}{2}(0{,}8)^2(0{,}2)^4 + \binom{6}{3}(0{,}8)^3(0{,}2)^3$$

EJERCICIO 6.10. Al lanzar dos dados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos resultados sean pares?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no salgan dos resultados iguales?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en algún dado salga un resultado múltiplo de tres?

SOLUCION. El espacio muestral correspondiente a la experiencia aleatoria es $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 5), (6, 6)\}$, formado por 36 sucesos elementales equiprobables.

a) Sea A el suceso «los dos resultados son pares».
El número de casos favorables a la realización del suceso A es 9, pues:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\ (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

por tanto:

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Sea B el suceso «no salen dos resultados iguales».

El número de casos favorables, es decir, el cardinal de B es 30, luego es:

$$P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

c) Sean los sucesos:

C = «en el primer dado sale múltiplo de tres».
D = «en el segundo dado sale múltiplo de tres».

Se pide la probabilidad del suceso $C \cup D$, que sabemos es:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{12}{36} + \frac{12}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}$$

EJERCICIO 6.11. Un ladrón pretende robar joyas en un piso de una finca con tres patios. En el patio A hay 12 pisos, de los cuales sólo 4 poseen joyas; en el B hay 5 pisos con joyas en su interior y 5 sin ellas, y en el C hay 14 pisos, de los cuales sólo 5 tienen joyas. El ladrón elige al azar un patio y un piso, también al azar en él. ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre joyas?

SOLUCION. Recordemos la distribución de pisos:
Patio A: 4 pisos con joyas y 8 sin joyas.
Patio B: 5 pisos con joyas y 5 sin joyas.
Patio C: 5 pisos con joyas y 9 sin joyas.

Sean los sucesos:

J = «el ladrón encuentra joyas en el piso elegido».
A = «el patio elegido es el A».
B = «el patio elegido es el B»
C = «el patio elegido es el C».

se tiene:

$$P(J) = P(J/A)P(A) + P(J/B)P(B) + P(J/C)P(C)$$

Como es:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3} \quad y \quad P(J/A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(J/B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$P(J/C) = \frac{5}{14},$$

tendremos que la probabilidad pedida es:

$$P(J) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{14}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{14 + 21 + 15}{42} = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

EJERCICIO 6.12. Sean los planos $x + y + 2z = 2$ y $ax + by + cz = 4$. Los coeficientes a, b y c se obtienen lanzando un dado ordinario. Hallar la probabilidad de que ambos planos sean:

a) coincidentes b) paralelos.

SOLUCION. Debemos suponer que el primer lanzamiento es el valor de a, el segundo el valor de b y el tercero el de c.

a) Para que los planos sean coincidentes, sus ecuaciones deben ser proporcionales, luego debe ser $a = 2$, $b = 2$ y $c = 4$, y es:

$$P(\text{coincidentes}) = \frac{1}{VR_{6,3}} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

b) Para que los planos sean paralelos no coincidentes, debe ser:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \neq \frac{4}{2}$$

como los únicos resultados proporcionales a $1, 1, 2$ distintos de la terna $2, 2, 4$ (para la cuál son coincidentes) son $1, 1, 2$ y $3, 3, 6$, se tiene que:

$$P(\text{paralelos}) = \frac{2}{VR_{6,3}} = \frac{2}{216} = \frac{1}{108}$$

EJERCICIO 6.13. María dice: «He lanzado 20 veces una moneda y me han salido 20 caras», a lo que Pedro responde: «Esto que te ha sucedido es tan probable como que el resultado hubiese sido CC+ +C+ + +CCCC+ +C+ + + +C.» María replica: «Entonces es igualmente probable que me salgan 20 caras o que me salgan 9 caras y 11 cruces.» Responde a María justificando si es o no cierta su afirmación, y calcula las probabilidades de los dos sucesos que comparó María.

SOLUCION. En el experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de 20 monedas, el espacio muestral está formado por los 2^{20} resultados posibles, todos ellos equiprobables.

Los sucesos: w = «salir 20 caras» y w_1 = «CC+ +C+ + +CCCC+ +C+ + + +C» son dos de estos sucesos elementales, por lo que tienen igual probabilidad, siendo

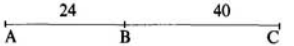
$P(w) = P(w_1) = \frac{1}{2^{20}}$. Sin embargo, si A es el suceso «9 caras y 11 cruces», su probabilidad es:

$$P(A) = \binom{20}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

En suma, la afirmación de Pedro es correcta, pero María la interpreta erróneamente y saca de ella una conclusión equivocada, ya que $w_1 \in A$, pero hay $\binom{20}{9} - 1$ resultados más que favorecen la realización del suceso A.

EJERCICIO 6.14. Un viajante sabe que hay un defecto en la correa del ventilador de su coche. Levantando el capot sólo pueden verse 24 cm de los 64 cm que tiene la correa del ventilador. ¿Cuál es la probabilidad de que vea el defecto al menos una vez, si inspecciona el coche después de cada jornada laboral durante siete días, levantando simplemente el capot e inspeccionando el motor, sin realizar ninguna otra acción?

SOLUCION. Al parar el coche, el defecto queda en un lugar al azar (que puede ser visible o no). La probabilidad de que sea visible es la misma que la de que dado un segmento ABC, con AB = 24 cm y BC = 40 cm, al elegir en él un punto al azar, éste sea un punto del segmento AB.



$$P(\text{visible}) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{no visible}) = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$$

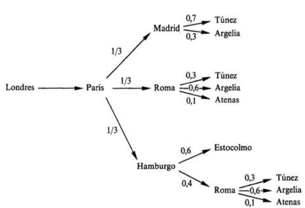
Sea A el suceso «el viajante ve el defecto al menos una vez en 7 observaciones». El suceso contrario de A es $\bar{A}$ = «el viajante no ve el defecto en ninguna de las 7 observaciones», y su probabilidad es $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{8}\right)^7$. Por consiguiente:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^7$$

EJERCICIO 6.15. Un avión parte de Londres y reposa en París, desde donde es igualmente probable que viaje a Madrid, Roma o Hamburgo. Si va a Madrid puede ir a Túnez o Argelia, teniendo una probabilidad de 0,7 de viajar a Túnez. Si va a Roma puede continuar hacia Argelia, con probabilidad 0,3, hacia Túnez, con probabilidad

0,6, y sino seguirá hacia Atenas. Por último, si va a Hamburgo puede continuar hacia Estocolmo, con probabilidad 0,6, o hacia Roma, con probabilidad 0,4 y entonces, continúa el viaje como si hubiera ido directamente de París a Roma. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión termine en Argelia? Suponiendo que haya llegado a Argelia, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado por Roma?

SOLUCION. Haremos previamente un diagrama de árbol que recoja los itinerarios y las probabilidades de cada tramo.



Sea A el suceso «el avión termina en Argelia», y sean los sucesos:

M = «el avión hace el itinerario Londres-París-Madrid».
R = «el avión hace el itinerario Londres-París-Roma».
H = «el avión hace el itinerario Londres-París-Hamburgo-Roma».

Si el avión llega a Argelia, el itinerario seguido por él hasta la escala anterior es el descrito en alguno de los sucesos M, R o H, luego:

$$P(A) = P(A/M)P(M) + P(A/R)P(R) + PA/H)P(H) = 0{,}3\frac{1}{3} + 0{,}6\frac{1}{3} + 0{,}6\frac{1}{3}0{,}4 =$$

$$= \frac{1}{3}(0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}24) = 0{,}38$$

Sea B el suceso «el avión ha pasado por Roma». Se pide:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,46}{0,38} = 0,736$$

$B = R \cup H$, luego $P(B) = P(R) + P(H) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}0,4 = \frac{1}{3}1,4 = 0,46.$

Otro procedimiento

Denotaremos, por ejemplo, L-P-M-T, el itinerario Londres-París-Madrid-Túnez. Así, los distintos itinerarios (posibles resultados) son:

M_1 = L-P-M-T	$P(M_1) = \frac{1}{3}0,7$
M_2 = L-P-M-A	$P(M_2) = \frac{1}{3}0,3$
R_1 = L-P-R-T	$P(R_1) = \frac{1}{3}0,3$
R_2 = L-P-R-A	$P(R_2) = \frac{1}{3}0,6$
R_3 = L-P-R-At	$P(R_3) = \frac{1}{3}0,1$
H_1 = L-P-H-E	$P(H_1) = \frac{1}{3}0,6$
H_{21} = L-P-H-R-T	$P(H_{21}) = \frac{1}{3}0,4 \cdot 0,3$
H_{22} = L-P-H-R-A	$P(H_{22}) = \frac{1}{3}0,4 \cdot 0,6$
H_{23} = L-P-H-R-At	$P(H_{23}) = \frac{1}{3}0,4 \cdot 0,1$

Si A es el suceso «el avión termina en Argelia», tenemos:

$$A = \{M_2, R_2, H_{22}\}, \quad y \quad P(A) = P(M_2) + P(R_2) + P(H_{22}) = 0,38$$

Si B es el suceso «el avión ha pasado por Roma», entonces es

$$B = \{R_1, R_2, R_3, H_{21}, H_{22}, H_{23}\} \quad y \quad A \cap B = \{R_2, H_{22}\}.$$

Se pide:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(R_2) + P(H_{22})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}0{,}6 + \frac{1}{3}0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}38} = 0{,}736$$

EJERCICIO 6.16. Un detective quiere capturar un prisionero que se acaba de escapar. Lo conoce muy bien y sabe que irá a pasar la noche a un domicilio de la ciudad A con una probabilidad de 3/5, o a un domicilio de otra ciudad B, con probabilidad 2/5. Si pasa la noche en A, la probabilidad de que pase la noche siguiente en A es 1/3 y la probabilidad de que vaya al domicilio de la otra ciudad B es 2/3. Si pasa la noche primera en B hay una probabilidad de 9/10 de que pase también la segunda noche en B, y una probabilidad de 1/10 de que vaya a pasar la segunda noche a un paradero desconocido. Calcular las probabilidades de que pase la segunda noche en la ciudad A, en la B, o en paradero desconocido. ¿Cuánto vale la suma de estas tres probabilidades? Justificar la respuesta.

SOLUCION. Sean los sucesos:

A_1 = «el prisionero pasa la primera noche en A»
B_1 = «el prisionero pasa la primera noche en B»
A_2 = «el prisionero pasa la segunda noche en A»
B_2 = «el prisionero pasa la segunda noche en B»
D = «el prisionero pasa la segunda noche en paradero desconocido».

En virtud del llamado a veces teorema de la probabilidad total, se tiene:

$$P(A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1) + P(A_2/B_1)P(B_1) = \frac{1}{3}\frac{3}{5} + 0\frac{2}{5} = \frac{3}{15}$$

$$P(B_2) = P(B_2/A_1)P(A_1) + P(B_2/B_1)P(B_1) = \frac{2}{3}\frac{3}{5} + \frac{9}{10}\frac{2}{5} = \frac{19}{25}$$

$$P(D) = P(D/A_1)P(A_1) + P(D/B_1)P(B_1) = 0\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P(A_2) + P(B_2) + P(D) = 1$$

La suma de las tres probabilidades es uno pues A_2, B_2 y D forman una partición del espacio muestral de la experiencia que consiste en observar dónde pasa el prisionero la segunda noche.

EJERCICIO 6.17. Calcular la probabilidad de que en una familia de 3 hijos haya:

1.° 3 varones ; 2.° 2 varones y 1 hembra ; 3.° 1 varón y 2 hembras.

SOLUCION:

$$P_{3\,\text{varones}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{RP_3^3}{RV_2^3} = \frac{\frac{3!}{3!}}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P_{2\,\text{varones, 1 hembra}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{RP_3^{2,1}}{RV_2^3} = \frac{\frac{3!}{2!1!}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P_{1\,\text{varón, 2 hembras}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{RP_3^{1,2}}{RV_2^3} = \frac{\frac{3!}{1!2!}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

EJERCICIO 6.18. Una bolsa contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se extraen de una en una, sin devolver la bola a la urna después de cada extracción. Calcular la probabilidad de que salgan en su orden (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

SOLUCION:

$$\text{Prob. pedida} = p_{(1)} \cdot p_{(2)} \cdot p_{(3)} \cdot p_{(4)} \cdot p_{(5)} \cdot p_{(6)} \cdot p_{(7)} \cdot p_{(8)} \cdot p_{(9)} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{9!}$$

Otro modo:

$$\text{Prob. pedida} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{P_9} = \frac{1}{9!}$$

EJERCICIO 6.19. Lanzando un dado sobre una mesa 2 veces consecutivas, calcular la probabilidad de obtener por los menos un cinco.

SOLUCION: Casos favorables: $\left\{\begin{matrix} 1\text{-}5 \ ; \ 2\text{-}5 \ ; \ 3\text{-}5 \ ; \ 4\text{-}5 \ ; \ 5\text{-}5 \ ; \ 6\text{-}5 \\ 5\text{-}1 \ ; \ 5\text{-}2 \ ; \ 5\text{-}3 \ ; \ 5\text{-}4 \ \text{ y } \ 5\text{-}6 \end{matrix}\right\}$ total 11.

Casos posibles: $RV_6^2 = 6^2 = 36$ Prob. pedida $= \frac{11}{36}$

EJERCICIO 6.20. Se toman al azar dos cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener un as y un rey.

SOLUCION. Sean los sucesos: a = {sacar as} b = {sacar rey}. Se pide:

$$p(a \text{ y } b) = p(a) \cdot p(b/a) + p(b) \cdot p(a/b) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{195}$$

EJERCICIO 6.21. Se colocan al azar 3 personas en 5 sillas alineadas. Hallar la probabilidad de que al menos 2 de ellas queden juntas.

SOLUCION. Sea el suceso A = {Al menos 2 personas quedan juntas}. Tendremos:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) \quad \text{siendo} \quad \bar{A} = \{\text{No quedan 2 personas juntas}\}$$

Los casos favorables del suceso $\bar{A}$ son las diferentes maneras en que pueden sentarse las 3 personas en las sillas:

$$1.^a \quad : \quad 3.^a \quad : \quad 5.^a \quad \text{que son } P_3 = 3! = 6.$$

Los casos posibles son variaciones de 5 asientos a ocupar 3 personas, es decir: $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Por tanto:

$$p(\bar{A}) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \quad \text{y en consecuencia:} \quad p(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

EJERCICIO 6.22. Se lanza una moneda 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga cara exactamente 2 veces?

SOLUCION. El suceso pedido es: A = {sacar 2 caras y 3 cruces}.
Los casos favorables son las permutaciones de: CCXXX. Su número es

$$RP_5^{3,2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Los casos posibles son en total: $RV_2^5 = 2^5 = 32$. Por tanto:

$$p(A) = \frac{10}{32} = 0{,}3125.$$

EJERCICIO 6.23. Tres cajas idénticas continen cada una dos fichas. En una las dos fichas son de color blanco, en otra son de color rojo y en la tercera, una es roja y la otra blanca.

Escogida al azar una caja se extrae una ficha, que resulta ser de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra ficha sea también blanca?

SOLUCION. Tenemos las cajas

C_1	C_2	C_3
2 blancas	2 Rojas	1 blanca 1 Roja

Una formulación equivalente del problema es: Escogida al azar una caja se extrae una ficha, que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida sea la C_1?

Sean los sucesos:

$B \equiv$ «La ficha extraída es blanca».
$C_1 \equiv$ «La caja elegida es la C_1».
$C_2 =$ «La caja elegida es la C_2».
$C_3 \equiv$ «La caja elegida es la C_3».

Como súponemos que las tres cajas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, es:

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$$

Se pide la probabilidad del suceso C_1 condicionado a B, y aplicando la fóñrmula de Bayes, tenemos:

$$P(C_1/B) = \frac{P(B/C_1) \cdot P(C_1)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

donde

$$P(B) = P(B/C_1) \cdot P(C_1) + P(B/c_2)P(C_2) + P(B/c_3)P(C_3) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 6.24. Una enciclopedia consta de 8 tomos, titulado el primero «Matemáticas». Calcular la probabilidad de que al elegir al azar dos tomos resulte elegido el tomo «Matemáticas».

SOLUCION. Probabilidad pedida: $p = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

$$p = \frac{C_7^1}{C_8^2} = \frac{7}{\dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}} = \frac{1 \cdot 2}{8} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 6.25. Una empresa tiene dos factorías de fabricación de coches. La primera produce el 60 % de los que el 10 % son azules y la segunda produce el 40 % de los que la mitad son azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al comprar un coche azul sea de la primera factoría? ¿Idem de la segunda factoría?

SOLUCION:

Suceso 1 = {fabricado en la primera factoría}.

Suceso 2 = {fabricado en la segunda factoría}.

Suceso A = {coche fabricado de color azul}.

$$p(1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \quad ; \quad p(2) = \frac{40}{100} = \frac{5}{2} \quad ; \quad P(A/1) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} \quad ; \quad p(A/2) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

a) $p(A/1) = \dfrac{p(A \cap 1)}{p(1)}$ de donde $p(A \cap 1) = p(1) \cdot p(A/1) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{50}$

b) $p(A/2) = \dfrac{p(A \cap 2)}{p(2)}$ de donde $P(A \cap 2) = p(2) \cdot p(A/2) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5}$

EJERCICIO 6.26. La probabilidad de que al llamar a la centralita telefónica de una universidad el teléfono esté comunicando es 0,3 y la probabilidad de que la telefonista nos diga que la extensión que pedimos comunica es 0,2. Hallar la probabilidad de que logremos comunicar con la extensión deseada.

SOLUCION. Sean los sucesos:

A = {El teléfono de la universidad comunica} $\rightarrow p(A) = 0{,}3$

B = {La telefonista nos dice que la extensión comunica} $\rightarrow p(B) = 0{,}2$

$$\left.\begin{array}{l} p(\bar{A}) = 1 - (A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \\ p(B/\bar{A}) = 1 - p(B/\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \end{array}\right\}$$

El suceso pedido es $\bar{A} \cap \bar{B}$. Los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son dependientes:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}/\bar{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$$

EJERCICIO 6.27. En un dado trucado la probabilidad de obtener i es directamente proporcional a i para i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Calcular la probabilidad de no obtener par en dos lanzamientos consecutivos.

SOLUCION. Sean los sucesos:

A = {sacar cifra par en dos lanzamientos consecutivos}.
i = {sacar i en un lanzamiento}.
C = {sacar cifra par en el primer lanzamiento}.
D = {sacar cifras par en el segundo lanzamiento}.
Se verifica:

$$\frac{p(1)}{1} = \frac{p(2)}{2} = \frac{p(3)}{3} = \frac{p(4)}{4} = \frac{p(5)}{5} = \frac{p(6)}{6} =$$

$$= \frac{p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6} = \frac{1}{21}$$

$$p(i) = \frac{i}{21}$$

$$p(C) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$p(D) = p(C) = \frac{4}{7}$$

$$p(A) = p(C \cap D) = p(C) \cdot p(D) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}.$$

Probabilidad pedida $= p(\bar{A}) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$.

EJERCICIO 6.28. En un cierto conjunto de números naturales la probabilidad de que uno de ellos sea divisible por 3 es 1/6, la probabilidad de que sea divisible por 7 es 1/5 y la probabilidad de que sea divisible por 21 (es decir por 3 y por 7) es 1/12. ¿Cuál es la probabilidad de que un número de ese conjunto sea divisible por 3 ó 7?

SOLUCION. Sean los sucesos:

$A = \{$ser divisible por 3$\}$.
$B = \{$ser divisible por 7$\}$.
$C = \{$ser divisible por 3 y 7$\} = A \cap B$.
$D = \{$ser divisible por 3 ó 7$\} = A \cup B$.

$$p(A) = \frac{1}{6} \quad ; \quad p(B) = \frac{1}{5} \quad ; \quad p(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

Se verifica: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ al ser los sucesos compatibles. Luego

$$p(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{12} = \frac{10 + 12 - 5}{60} = \frac{17}{60}$$

EJERCICIO 6.29. Dos equipos de natación han competido en cinco ocasiones, ganando el primero en cuatro de ellas. Si este equipo consta de tres miembros y el número de victorias del primero es doble que el del segundo y triple que el del tercero. ¿Cuál será la probabilidad de que gane el primero de los tres nadadores en la próxima confrontación entre ambos equipos?

SOLUCION. Sean los sucesos:

$A = \{$ganar el primer equipo$\}$.
$B = \{$ganar el primer nadador del primer equipo$\}$.
$C = \{$ganar el segundo nadador del primer equipo$\}$.
$D = \{$ganar el tercer nadador del primer equipo$\}$.

La probabilidad pedida es:

$$p(B) = p(A) \cdot p(B/A) \quad (1)$$

Según el enunciado es:

$$p(B/A) = 2p(C/A) = 3p(D/A) \quad (2)$$

siendo

$$p(A/A) = p(B/A) + p(C/A) + p(D/A) = 1 \quad (3)$$

sustituyendo (2) en (3) queda:

$$p(B/A) + \frac{1}{2}p(B/A) + \frac{1}{3}p(B/A) = 1$$

de donde: $p(B/A) = \frac{6}{11}$. Como es $p(A) = \frac{4}{5}$. Sustituyendo estos últimos valores es (1), es:

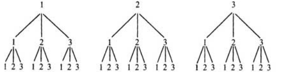
$$p(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{55}$$

EJERCICIO 6.30. Una urna contiene nueve bolas: tres con el número 1, tres con el número 2 y tres con el número 3. Se sacan simultáneamente tres bolas de la urna y se denomina x la variable aleatoria igual a la suma de los tres números marcados en las bolas. Hallar los valores posibles de x y la ley de probabilidad.

SOLUCION. El número de casos posibles es: $RV_3^3 = 3^3 = 27$.

x puede tomar los valores siguientes: 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9.

Los casos favorables se obtienen considerando el siguiente diagrama del árbol:



Valores de $x = 3 \longrightarrow 1, 1, 1 \longrightarrow$ número de casos 1

Valores de $x = 4 \longrightarrow \begin{Bmatrix} 1, 1, 2 \\ 1, 2, 1 \\ 2, 1, 3 \end{Bmatrix} \longrightarrow$ número de casos 3

Valores de $x = 5 \longrightarrow \begin{matrix} 1, 2, 2 \\ 2, 1, 2 \\ \left\{\begin{matrix} 2, 2, 1 \\ 3, 1, 1 \end{matrix}\right\} \\ 1, 3, 1 \\ 1, 1, 3 \end{matrix} \longrightarrow$ número de casos 6

Valores de $x = 6 \longrightarrow \begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 2 \\ \left\{\begin{matrix} 2, 1, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix}\right\} \\ 3, 2, 1 \\ 2, 2, 2 \end{matrix} \longrightarrow$ número de casos 7

$$\text{Valores de } x = 7 \longrightarrow \begin{matrix} 2,3,2 \\ 2,2,3 \\ \left\{\begin{matrix} 3,2,2 \\ 1,3,3 \end{matrix}\right\} \\ 3,1,3 \\ 3\,3,1 \end{matrix} \longrightarrow \qquad \text{número de casos } 6$$

$$\text{Valores de } x = 8 \longrightarrow \left\{\begin{matrix} 2,3,3 \\ 3,2,3 \\ 3,3,2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \qquad \text{número de casos } 3$$

$$\text{Valores de } x = 9 \longrightarrow \{3,3,3\} \longrightarrow \qquad \text{número de casos } 1$$

$$p(3) = \frac{1}{27} \;;\; p(4) = \frac{3}{27} \;;\; p(5) = \frac{6}{27} \;;\; p(6) = \frac{7}{27} \;;$$

$$p(7) = \frac{6}{27} \;;\; p(8) = \frac{3}{27} \;;\; p(9) = \frac{1}{27}$$

También pueden obtenerse así

$$p(3) = \frac{RP_3^3}{27} = \frac{1}{27} \;;\; p(4) = \frac{RP_3^{2,1}}{27} = \frac{3}{27} \;;\; p(5) = \frac{RP_3^2}{27} + \frac{RP_3^2}{27} = \frac{6}{27} \;;$$

$$p(6) = \frac{3!}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27} \;;\; p(7) = \frac{RP_3^2}{27} + \frac{RP_3^2}{27} = \frac{6}{27} \;;\; p(8) = \frac{RP_3^{2,1}}{27} = \frac{3}{27} \;;$$

$$p(9) = \frac{RP_3^3}{27} = \frac{1}{27}$$

EJERCICIO 6.31. En una fábrica se observa que una determinada máquina produce piezas que son defectuosas. Se sabe por estudios realizados a lo largo de bastante tiempo, que el 20 % de las piezas que produce dicha máquina son defectuosas. De la producción de un día cualquiera, se eligen al azar 8 piezas fabricadas por esa máquina.

Hallar la probabilidad de que:

- **a) Sean defectuosas exactamente dos.**
- **b) Que haya al menos una defectuosa.**

SOLUCION. a) Sean los sucesos:

$$A = \{\text{sacar solamente 2 piezas defectosas en 8 elegidas al azar}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \{\text{sacar una pieza buena}\} \\ D = \{\text{sacar una pieza defectuosa}\} = \bar{B} \end{array}\right\} \text{ B y D son incompatibles.}$$

Se verifica $p(D) = 0{,}2$; $p(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

El suceso A se puede presentar en las formas siguientes:

$$DDBBBBBB - DBDBBBBB - \cdots - BBBBBBDD.$$

Su número es: $RP_8^{2,6} = \dfrac{8!}{2!6!} = 28.$

Cada forma de presentación tiene la probabilidad siguiente:

$$p_1(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6$$
$$p_2(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6$$

....

....

$$p_{28}(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6$$

En total: $p(A) = 28 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2936$

b) Sean los sucesos:

$V = \{\text{sacar todas las piezas buenas entre 8 elegidas al azar}\}$
$C = \{\text{sacar al menos una defectuosa entre 8 elegidas al azar}\}$

Se verifica: $C = \bar{V}$; $p(V) = 0{,}8^8$:

$$p(C) = 1 - p(V) = 1 - 0{,}8^8 = 0{,}8322$$

EJERCICIO 6.32. Se tienen tres urnas. La primera contiene 3 bolas blancas y 2 rojas, la segunda 2 bolas blancas y 2 rojas y la tercera 3 bolas blancas y 3 rojas.

Se saca al azar una bola de la primera urna y se introduce en la segunda, seguidamente, se saca una de la segunda urna y se introduce en la tercera y, finalmente, se saca una bola de la tercera y se introduce en la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres urnas se queden en la misma composición inicial de bolas blancas y rojas?

SOLUCION:

1.ª urna	2.ª urna	3.ª urna
3 Blancas	2 Blancas	3 Blancas
2 Rojas	2 Rojas	3 Rojas

Para que después de la experiencia, la composición de las tres urnas sea la inicial, la bola extraída de cada urna y la bola metida en ella han de ser del mismo color. Por consiguiente, si la bola extraída de la primera urna es blanca, las extraídas de la segunda y tercera urnas han de ser también blancas. Análogamente para rojas.

Sean los sucesos:

$B_1 \equiv$ «La bola extraída de la primera urna es blanca».

$B_2 \equiv$ «La bola extraída de la segunda urna es blanca».

$B_3 \equiv$ «La bola extraída de la tercera urna es blanca».

$R_1 \equiv$ «La bola extraída de la primera urna es roja».

$R_2 \equiv$ «La bola extraída de la segunda urna es roja».

$R_3 \equiv$ «La bola extraída de la tercera urna es roja».

Puesto que los sucesos B_1, B_2 y B_3 son independientes, al igual que los R_1, R_2, R_3, tenemos que si $B = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ y $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$, es:

$$P(B) = p(B_1)p(B_2)p(B_3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7} = \frac{36}{175}$$

$$p(R) = p(R_1)p(R_2)p(R_3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7} = \frac{24}{175}$$

Se pide la probabilidad del suceso $B \cup R$, que al ser B y R incompatibles es:

$$p(B \cup R) = p(B) + p(R) = \frac{36 + 24}{175} = \frac{60}{175} = \frac{12}{35} \cong 0{,}0685$$

EJERCICIO 6.33. En tres máquinas A, B, C se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1 %, 2 % y 3 %. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

SOLUCION:

$$300 \text{ piezas} \begin{cases} 100 \text{ fabricadas por la máquina A} \\ 100 \text{ fabricadas por la máquina B} \\ 100 \text{ fabricadas por la máquina C} \end{cases}$$

Sean los sucesos:

$D \equiv$ «La pieza elegida de entre las 300, es defectuosa».

$A \equiv$ «La pieza elegida ha sido fabricada por la máquina A».

$B \equiv$ «La pieza elegida ha sido fabricada por la máquina B».

$C \equiv$ «La pieza elegida ha sido fabricada por la máquina C».

Se pide la probabilidad del suceso A condicionado a D, que en virtud del teorema de Bayes es:

$$p(A/D) = \frac{p(D/A) \cdot p(A)}{p(D)} = \frac{0{,}1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{0{,}6}{3}} = \frac{1}{6}$$

siendo

$$p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + p(D/C)p(C) =$$
$$= 0{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{0{,}6}{3}$$

EJERCICIO 6.34. Una caja A contiene 1 bola blanca y 3 rojas. Otra caja B contiene 5 blancas y 3 rojas. Se saca una bola al azar de A y otra de B y se las cambia de caja. Probabilidad para que después del cambio: a) La caja A no tenga bolas blancas. b) La composición de las cajas quede inalterada.

SOLUCION:

$$\text{Caja A}\begin{cases}1B\\3R\end{cases} \quad \text{Caja B}\begin{cases}5B\\3R\end{cases}$$

a) Para que, después del cambio, la caja A no tenga bolas blancas, debe ser:

$$A \xrightarrow{\text{Blanca}} B \begin{cases}6B\\2R\end{cases}$$

$$B \xrightarrow{\text{Roja}} A \ \{4R$$

b) Para que la composición de las cajas no se altere, debe introducirse en cada una de ellas una bola del mismo color que la que se ha extraído, es decir, las bolas extraídas de las dos cajas deben ser del mismo color.

$$\begin{matrix} A \xrightarrow{\text{Blanca}} B \\ B \xrightarrow{\text{Blanca}} A \end{matrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} A \xrightarrow{\text{Roja}} B \\ B \xrightarrow{\text{Blanca}} A \end{matrix}$$

Las probabilidades pedidas son entonces:

a) $P(\text{sacar de A una blanca y sacar de B una roja}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sucesos independientes}}}{=}$

$$= P(\text{sacar A blanca}) \cdot P(\text{sacar B roja}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

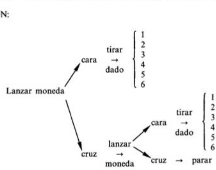
b) $P(\text{sacar de A blanca y de B blanca o sacar de A roja y de B roja}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sucesos disjuntos}}}{=}$

$$= P(\text{sacar de A blanca y de B blanca}) + P(\text{sacar de A roja y B roja}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{14}{32}.$$

EJERCICIO 6.35. Se lanza una moneda. Si aparece cara se lanza un dado. Si aparece cruz se lanza de nuevo la moneda, que si sale cruz se para el juego y si sale cara se lanza el dado. Probabilidad de que tire el dado y de que salga el 6.

SOLUCION:



P(tirar el dado y salir 6) = P(sacar cara y salir el 6 ó sacar cruz 1.ª vez y sacar cara 2.ª vez $\wedge$ salir 6) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjuntos}}}{=}$ P(sacar cara y salir 6) + P(cruz 1.ª vez $\wedge$ cara y 6) =

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep.}}}{=} P(\text{sacar cara}) \cdot P(\text{salir 6}) + P(\text{sacar cruz}) \cdot P(\text{sacar cara}) \cdot P(\text{salir 6}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}.$$

EJERCICIO 6.36. Una urna A contiene 1 bola blanca y 3 rojas. Otra B, 5 blancas y 3 rojas. Se saca al azar una bola de A y se pone en B, después se saca una de B. Probabilidad:

a) Las dos bolas sacadas sean del mismo color.

b) De que la 1.ª sea roja, sabiendo que la 2.ª ha sido roja.

SOLUCION: La composición inicial de las urnas es $A\begin{cases}1B\\3R\end{cases}$ $B\begin{cases}5B\\3R\end{cases}$.

1) Si la bola pasada de A a B es blanca, la composición de las urnas queda:

$$A\{3R \quad B\begin{cases}6B\\3R\end{cases}$$

2) Si la bola pasada de A a B es roja, la composición queda:

$$A\begin{cases}1B\\2R\end{cases} \quad B\begin{cases}5B\\4R\end{cases}$$

Consideremos los sucesos:

A_1 = «La bola extraída de A es blanca».
A_2 = «La bola extraída de A es roja».
B_1 = «La bola extraída de B es blanca».
B_2 = «La bola extraída de B es roja».

Se pide:

a) $P(\text{bolas de igual color}) = P((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)) =$

$$= P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_1/A_1) + P(A_2) \cdot P(B_2(A_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

b) $$P(A_2/B_2) = \frac{P(B_2/A_2) \cdot P(A_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{5}$$

$$P(B_2/A_2) = \frac{4}{9} \quad ; \quad P(A_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(B_2) = P(B_2/A_1) \cdot P(A_1) + P(B_2/A_2) \cdot P(A_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{36}$$

EJERCICIO 6.37. Veinte fichas idénticas en cuanto a forma están pintadas de blanco y negro por ambas caras de la siguiente manera: 10 son blancas por ambas caras, 4 son negras por ambas caras y 6 son blancas y negras. Se saca una ficha al azar y se observa que una de sus caras resulta ser negra. Probabilidad de que: a) la otra cara sea negra; b) la otra cara sea blanca.

SOLUCION:

a) $P(\text{sacar negra}/_{\text{ha salido negra}}) = P/_{\text{ser negra}}(\text{sacar negra}) = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

El espectro muestral condicionado al suceso salir una cara negra es → {8 negras y 6 blancas} por una sola cara

b) $P(\text{sacar blanca}/_{\text{ha salido negra}}) = P/_{\text{ser negra}}(\text{sacar blanca}) = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}.$

EJERCICIO 6.38. Una urna A contiene 4 bolas blancas, 2 rojas y 3 verdes. Otra B tiene solamente 6 rojas. Se sacan de A tres bolas y se las pone en B. Después se extraen 3 bolas de B. Probabilidad de que las extraídas de B sean tricolor.

SOLUCION:

$$\text{Composición de las urnas: } A\begin{cases}4b\\2R\\3v\end{cases} \quad B\{6R.$$

Para que después de extraídas tres bolas de A y pasadas a B, sea posible extraer tres bolas de distinto color de B, el resultado de la extracción de A debe ser:

1) 2b 1v → Nueva composición de las urnas:

$$A\begin{cases}2b\\2R\\2v\end{cases} \quad B\begin{cases}2b\\6R\\1v\end{cases}$$

2) 1b 2v → Nueva composición de las urnas:

$$A\begin{cases}3b\\2R\\1v\end{cases} \quad B\begin{cases}1b\\6R\\2v\end{cases}$$

3) 1b 1R 1v → Nueva composición de las urnas:

$$A\begin{cases}3b\\1R\\2v\end{cases} \quad B\begin{cases}1b\\7R\\1v\end{cases}$$

$$P(\text{sacar 1b, 1R, 1V de B}) = P(\text{1b, 1R, 1V de B}/_{\substack{\text{sacar de A 2b, 1V}\\ \text{pasandolas a B}}}) \cdot P(\text{sacar de A 2b, 1V}) +$$

$$+ P(\text{1b, 1R, 1V de B}/_{\text{sacar de A 1b, 2V}}) \cdot P(\text{sacar de A 1b, 2V}) +$$

$$+ P(\text{1b, 1R 1V de B}/_{\substack{\text{sacar de A 1b, 1R, 1V}\\ \text{pasandoles a B}}}) \cdot P(\text{sacar de A 1b, 1R, 1V}) =$$

$$= 3!\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}\cdot\frac{3}{7} + 3!\,\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} +$$

$$+ 3!\,\frac{1\cdot 7\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}$$

EJERCICIO 6.39. Se lanzan sucesivamente dos dados. Probabilidad de obtener al menos un 6. b) Se lanzan simultáneamente los dados. Probabilidad de no obtener el «seis doble». c) Se repite n-veces la operación hecha en b). Probabilidad de obtener el seis doble al menos una vez. Encontrar el valor de n para que dicha probabilidad sea mayor o igual a 9/10.

SOLUCION:

a) $\Omega = \{(x, y)/x, y \text{ son números} \to \text{del 1 a 6}\} \to \text{card}(\Omega) = VR_6^2 = 6^2 = 36$

$A = \{(x, y)/x \text{ ó } y \text{ es un seis}\} \to A^C = \{(x, y)/x, y \neq 6\} \to$

$\to \text{card}(A^C) = VR_5^2$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{VR_5^2}{VR_6^2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{13}{36}$$

b) $B = \{(x, y)/x = 6 = y\} \to B^C = \{(x, y)/x \neq 6 \vee y \neq 6\} \to$

$$\to P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

c) $P(\text{sacar doble seis al menos una vez en n tiradas}) =$

$$= 1 - [P(\text{no sacar el doble seis})]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geqslant \frac{9}{10} \to 1 - \frac{9}{10} \geqslant \left(\frac{35}{36}\right)^n \to \frac{1}{10} \geqslant \left(\frac{35}{36}\right)^n \to$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right) \geqslant n \cdot \ln\left(\frac{35}{36}\right) \rightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)}$$

EJERCICIO 6.40. Sabiendo que la probabilidad de que un alumno sea admitido en un examen es 0,3, calcular, para un grupo de 5 alumnos, la probabilidad de que: a) ninguno sea admitido, b) lo sean los cinco, c) lo sean al menos dos.

SOLUCION:

a) P(1.° no sea admitido y 2.° no admitido y 3.° no admitido y 4.° no admitido y 5.° no admitido) $\underset{\uparrow}{=}$ P(1.° no admitido) · P(2.° no admitido) ·

independientes

· P(3.° no admitido) · P(4.° no admitido) · P(5.° no admitido) = $(0,7)^5$.

b) P(1.° admitido y 2.° admitido y, ..., y 5.° admitido) = $(0,3)^5$.

c) P(al menos lo sean dos) = 1 − P(admitido ninguno o admitido solamente un alumno) = 1 − (P(ninguno admitido) + P(solamente uno admitido) = $= 1 - (0,7^5 + \underset{\uparrow}{5} \cdot 0,3 \cdot (0,7)^4) = 1 - (0,7)^5 - 5 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^4$

puede ser admitido cualquiera de los cinco

EJERCICIO 6.41. Tres urnas contienen bolas de colores, la primera 3 blancas y cinco rojas; la segunda 6 rojas y 4 negras; la tercera 6 blancas, 2 rojas y 3 negras. Se lanzó un dado, si sale 1 ó un 2 se extrae una bola de la 1.ª urna; si sale un tres o un 4, una bola de la 2.ª urna y si un 5 ó un 6, una bola de la 3.ª urna. Se sabe que se ha extraído una bola roja. Probabilidad de que en el dado haya salido un 5 ó un 6. ¿Y de que haya salido un 5?

SOLUCION:

a) Sean los sucesos:

R = «La bola extraída es roja».

A_{12} = «El resultado al lanzar el dado es 1 ó 2».

A_{34} = «El resultado al lanzar el dado es 3 ó 4».

A_{56} = «El resultado al lanzar el dado es 5 ó 6».

Se pide $P(A_{56}/R)$, y en virtud del teorema de Bayes es:

$$P(A_{56}/R) = \frac{P(A_{56}) \cdot P(R/A_{56})}{P(R)} \quad (1)$$

$$P(A_{56}) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(R/A_{55}) = \frac{2}{11}$$

$$P(R) = P(R/A_{12}) \cdot P(A_{12}) + P(R/A_{34}) \cdot P(A_{34}) + P(R/A_{56}) \cdot P(A_{56}) =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{6}\left(\frac{5}{8} + \frac{6}{10} + \frac{2}{11}\right) = \frac{2}{6} \cdot \frac{619}{440}$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$P(A_{56}/R) = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{619}{440}} = \frac{80}{619}$$

b) $P(\text{sacar } 5/R) = \frac{1}{2} \frac{80}{619} = \frac{40}{619}.$

EJERCICIO 6.42. Probabilidad de que al lanzar 4 dados salgan dos puntuaciones pares y dos impares.

SOLUCION:

$$\Omega = \{(x, y, z, t)/x, y, z, t \text{ puntuaciones de 1 a 6}\}$$
$$A = \{(x, y, z, t) \in \Omega/\text{haya dos pares y dos impares}\}$$

Para calcular el cardinal de A, empezaremos por BUSCAR cuantos SITIOS tenemos para los pares y para los impares:

$$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$$

Supuesto que $\boxed{\text{par}}$ $\boxed{\text{par}}$ $\boxed{\text{impar}}$ $\boxed{\text{impar}}$ $\Rightarrow$

$$P(A) = 6 \cdot P(\text{par y par e impar e impar}) =$$
$$= 6 \cdot P(\text{par}) \cdot P(\text{par}) \cdot P(\text{impar}) \cdot P(\text{impar}) =$$
$$= 6 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

EJERCICIO 6.43. Se dispone de 5 urnas idénticas, en las que la A contiene 8 bolas blancas y 2 negras; y las otras cuatro: B, C, D y E tienen 3 blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se saca una bola, resulta ser blanca. Probabilidad de que la urna elegida sea la A.

SOLUCION. Teorema de Bayes: La partición son las urnas $\{A, B, C, D, E\}$.
Sea $H = \{\text{sacar una bola blanca}\}$.

$$P(A/H) = \frac{P(H/A) \cdot P(A)}{P(H/A) \cdot P(A) + P(H/B) \cdot P(B) + \cdots + P(H/E) \cdot P(E)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{8}{23}$$

EJERCICIO 6.44. En un examen sobre 20 temas se extraen al azar 3, pudiendo el alumno elegir uno de entre los tres y del cual se examina. Probabilidad de aprobar un alumno que sólo sepa 5.

SOLUCION:

$$P(\text{aprobrar}) = 1 - P(\text{suspender}) = 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{177}{288}$$

EJERCICIO 6.45. Entre las 100 hojas de un libro, cinco de ellas encabezan capítulo. Probabilidad de que, abriendo al azar 50 veces, aparezcan dos veces encabezamiento de capítulo.

SOLUCION: El espacio muestral de la experiencia es:

$$\Omega = \{(P_1, P_2, ..., P_{50})/P_i \text{ es una página del libro}\}$$

Sea A el suceso «aparecen dos páginas de encabezamiento de capítulo».
El número de resultados que verifican el suceso A es:

$$PR_{50}^{2,48} = \frac{50!}{2!48!} = 1.225,$$

y la probabilidad de cada uno de ellos es:

$$\frac{5}{100}\cdot\frac{5}{100}\cdot\frac{95}{100}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{48 productos}}}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\frac{95}{100}=\frac{(19)^{48}}{(20)^{50}}$$

Por consiguiente, la probabilidad de A es:

$$P(A) = 1.225\cdot\frac{(19)^{48}}{(20)^{50}}$$

EJERCICIO 6.46. Una caja contiene una moneda corriente y una de dos caras. Se escoge una al azar y se lanza. Si sale cara se lanza la otra, y si sale cruz la misma.

a) Probabilidad de que en el 2.° lanzamiento salga cara.

b) Sabiendo que en el 2.° lanzamiento sale cara, probabilidad de que también lo haya sido el primero.

SOLUCION. Sea A = moneda corriente y B = moneda falsa (dos caras).

$$A\begin{cases}\text{cara}\rightarrow B\rightarrow\text{cara}\\ \text{cruz}\rightarrow A\begin{cases}\text{cara}\\ \text{cruz}\end{cases}\end{cases}$$

$$B\rightarrow\text{cara}\rightarrow A\begin{cases}\text{cara}\\ \text{cruz}\end{cases}$$

Sean los sucesos:

A = «La moneda elegida al azar es A».
B = «La moneda elegida al azar es B».
C_1 = «Sale cara al lanzar la moneda A».
C_2 = «Sale cruz al lanzar la moneda A».

a) Para que salga cara en el segundo lanzamiento, deben producirse las siguientes secuencias de sucesos:

$$A\text{-}C_1 \quad \text{o} \quad A\text{-}C_2C_1 \quad \text{o} \quad B\text{-}C_1$$

La probabilidad pedida es entonces:

$$P = P(A)\cdot P(C_1) + P(A)P(C_2)\cdot P(C_1) + P(B)P(C_1) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

b) Sean los sucesos:

M_1 = «Cara en el primer lanzamiento».

M_2 = «Cara en el segundo lanzamiento».

$$P(M_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} \quad ; \quad P(M_2) = \frac{5}{8}$$

Se pide:

$$P(M_1/M_2) = \frac{P(M_2/M_1) \cdot P(M_1)}{P(M_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

El suceso M_2/M_1 se verifica si se dan las secuencias: A-C_1 o B-C_1

$$P(M_2/M_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 6.47. Un tirador da en el blanco con una probabilidad de 0,4 y falla con probabilidad 0,6. Disparar 4 veces, probabilidad de dar en el blanco: a) dos veces; b) al menos una vez.

SOLUCION:

a) Sitios para los dos aciertos en cuatro tiradas: $PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

fijada una situación $(A_1, A_1, F_1, F_2) \rightarrow$

P(acertar dos veces) = $6 \cdot P(A_1, A_1, F_1, F_2) = 6 \cdot$ P(acierto) $\cdot$ P(acierto) $\cdot$

P(fallar) $\cdot$ P(fallar) $= 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = \frac{432}{625}$

b) P(al menos una vez) = 1 − P(fallar siempre) $= 1 - (0{,}6)^4 = \frac{544}{625}$.

EJERCICIO 6.48. De una baraja de 40 cartas se extraen al azar 5 espadas. Probabilidad de que en la próxima extracción se saque un as.

SOLUCION:

A = suceso de que entre las 5 espadas esté el as de espadas.

B = suceso de que entre las 5 espadas no esté el as de espadas.
C = suceso que en la extracción de la 1.ª carta de las 35 restantes sea un as.

$$P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \underset{\substack{\uparrow \\ (A \cap C) \text{ y } (B \cap C) \\ \text{disjuntos}}}{=} P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B)$$

$$= \frac{\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{3}{35} + \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{10}$$

EJERCICIO 6.49. En una jaula hay 2o conejos: 5 blancos y 15 negros. Se dejan salir de uno en uno. Probabilidad de que salgan dos o más conejos blancos juntos?

SOLUCION. P(salgan dos o más conejos blancos juntos) = 1 − P(no salgan dos o más blancos juntos).

a) Casos posibles: $PR_{20}^{5,15} = \dfrac{20!}{5!\,15!} = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 16$

Casos favorables: tienen que ir intercalados entre 16 lugares

$$\underset{1}{\_\,N\,} \underset{2}{\_\,N\,} \underset{3}{\_\,N\,} \_ \cdots \underset{15}{\_\,N\,} \_ \rightarrow \binom{16}{5}$$

$$\text{P(salgan dos o más conejos blancos juntos)} = 1 - \frac{\binom{16}{5}}{PR_{20}^{5,15}} =$$

$$= \frac{1 - 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5!\,19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 16} = 1 - \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{4!\,19 \cdot 17} = 1 - \frac{7 \cdot 13}{19 \cdot 17} = \frac{232}{323}$$

EJERCICIO 6.50. Se hecha un dado 10 veces. Probabilidad de que salga todas las puntuaciones al menos una vez.

SOLUCION:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10})/_{x_i = 1 \text{ ó } 2 \text{ ó } 3 \text{ ó } 4 \text{ ó } 5 \text{ ó } 6}\} \rightarrow \text{card}\,(\Omega) = VR_6^{10} = 6^{10}$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10})/_{\text{esté el } 1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6}\} \rightarrow$$
$$\rightarrow A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{10})/x_k \neq i\}$$

$$A^C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$$

$$P(A^C) = VR_5^9 \cdot 6 = 5^9 \cdot 6.$$

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{5^9 \cdot 6}{6^{10}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

EJERCICIO 6.51. Se lanzan 7 bolas en 3 cajas: A, B y C, de modo que la probabilidad de caer en cada caja sea la misma. Probabilidad:

a) De que A se quede sin bola.
b) De que alguna caja se quede sin bola.
c) Todas tengan bolas.

SOLUCION:

a) Cuando se tira una bola ésta tiene la probabilidad de caer en A de 1/3 y de no caer en A de 2/3.

$$P(\text{de que 7 no caigan en A}) = [P(\text{de que 1 no caiga en A})]^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

b) P(A vacía o B vacía o C vacía) = P(A vacía) + P(B vacía) + + P(C está vacía) − P(A vacía ∩ B vacía) − P(A vacía ∩ C vacía) − − P(B vacía ∩ C vacía) + $\underbrace{\text{P(A vacía} \cap \text{B vacía} \cap \text{C vacía)}}_{\text{El último sumando es cero, pues disponemos que, lanzada una bola, cae en alguna caja}}$

$$P(\text{A está vacía es}) = P(\text{B está vacía}) = P(\text{C está vacía}) = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{A vacía y B vacía}) = P(\text{caiga en C}) = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ P(\text{A vacía y C vacía}) = P(\text{caigan en B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ P(\text{B vacía y C vacía}) = P(\text{caigan en A}) = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \end{array}\right\}$$

Por tanto,

$$P(\text{A vacía o B vacía o C vacía}) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 =$$

$$= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^7\right] = 3 \cdot \frac{2^7 - 1^7}{3^7} = \frac{12}{3^6}$$

c) TODAS TENGAN. Su contrario es de que alguna caja se quede vacía

$$\text{P(todas tengan)} = 1 - \text{P(alguna se quede vacía)} = 1 - \frac{12}{3^6}$$

EJERCICIO 6.52. Tres jugadores de igual maestría, juegan una serie de partidas, en la que el ganador de cada partida consigue un punto; ganando el que alcance primero tres puntos. El jugador A gana el 1.° y 3.° partido, «B» gana el 2.°. Probabilidad de que sea C el que gane y compararla con la probailidad de ganar que tienen A y B.

SOLUCION.	1.ª partida	2.ª partida	3.ª partida
	A	B	A

Para que gane C $\longrightarrow$ ABACCC
ABABCCC
ABACBCC
ABACCBC

P(ganar C) = P(juego sea ABACCC o ABABCCC o ABACBCC o ABACCBC) =

$$= \text{P(ABACCC)} + \text{P(ABABCCC)} + \text{P(ABACBCC)} + \text{P(ABACCBC)} =$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ \text{una jugada}}}{P^3}(C) + P(B) \cdot P^3(C) + P(C) \cdot P(B) \cdot P^2(C) + P^2(C) \cdot P(B) \cdot P(C) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{3}{81} = \frac{2}{27}$$

$$\text{P(ganar B el juego)} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{3^2 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1}{3^4} =$$

$$= \frac{18}{3^4} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

Para que gane B debe darse alguno de los siguientes resultados:

$$\text{ABA}\begin{cases} \text{BB} \\ \text{CBB} \\ \text{BCB} \\ \text{BCCB} \\ \text{CCBB} \\ \text{CBCB} \end{cases}$$

$$P(\text{ganar A el juego}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{3}{3^4} = \frac{3^3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 3}{3^4}$$

$$= \frac{3^2 + 2\cdot 3 + 3 + 1}{3^3} = \frac{19}{3^3} = \frac{19}{27}$$

Para que gane A debe darse alguno de estos resultados:

$$\text{ABA}\begin{cases} \text{A} \\ \text{BA} \\ \text{CA} \\ \text{BCA} \\ \text{CBA} \\ \text{CCA} \\ \text{BCCA} \\ \text{CCBA} \\ \text{CBCA} \end{cases}$$

Nota. P(gana C) + P(gana B) + P(gana A) = 1. En efecto:

$$\frac{2}{27} + \frac{6}{27} + \frac{19}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

EJERCICIO 6.53. Se hace un disparo con cada uno de 3 cañones, siendo la probabilidad de hacer blanco 0,1, 0,2, 0,3, respectivamente. Probabilidad de cada uno de los números posibles de blancos.

SOLUCION:

a) P(falla 1°, falla 2.° y falla 3.°) $\underset{\text{indep.}}{=}$ P(fallar 1.°) · P(fallar 2.°) · P(fallar 3.°) =
= 0,9 · 0,8 · 0,7 = 0,504

b) P(acierta 1°, falla 2.° y falla 3.° o falla 1.°, acierta 2.°, falla 3.° o falla 1.° falla 2.° acierta 3.°) $\underset{\text{disjunta}}{=}$ P(acierta 1.°, falla 2.°, falla 3.°) +
+ P(falla 1.°, acierta 2.°, falla 3.°) + P(falla 1.°, falla 2.° y acierta 3.°) =
= 0,1 · 0,8 · 0,7 + 0,9 · 0,2 · 0,7 + 0,9 · 0,8 · 0,3 = 0,398

c) P(acierta 1.°, acierta 2.°, falla 3.° o acierta 1.°, falla 2.°, acierta 3.° o falla 1.°, acierta 2.°, acierta 3.°) = 0,1 · 0,2 · 0,7 + 0,1 · 0,8 · 0,3 +
+ 0,9 · 0,2 · 0,3 = 0,092

d) P(acierta 1.°, acierta 2.°, acierta 3.°) = 0,1 · 0,2 · 0,3 = 0,006

EJERCICIO 6.54. **Una urna contiene dos bolas. Se sabe que se ha llenado así: se lanza una moneda al aire dos veces y se pone una bola blanca si sale cara y negra si sale cruz. Se saca una bola y es blanca. Probabilidad de que la otra que hay en la urna sea blanca.**

SOLUCION:

$$P(2.^a \text{ bola sale blanca}/_{\text{la 1.}^a \text{ es blanca}}) = \frac{P(1.^a \text{ sea blanca y } 2.^a \text{ sea blanca})}{P(\text{la } 1.^a \text{ sea blanca})} =$$

$$= \frac{P(\text{sacar dos caras})}{P(\text{sacar cara en el } 1.^{er} \text{ lanzamiento})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 6.55. **Se conoce con el nombre de «Urna de Payla» el siguiente experimento: Se tiene una urna con «b» bolas blancas y «b» bolas negras. En cada extracción se saca una bola y a continuación, se introducen «c» bolas del mismo color (c = n.° fijo). Hallar:**

a) **Probabilidad de que la 1.ª bola sea negra y la 2.ª blanca.**
b) **Probabilidad de que la 3.ª sea blanca.**
c) **Probabilidad de que en 4 extracciones, se obtengan bolas de colores alternadas.**

SOLUCION:

a) $P(1.^a \text{ bola negra y la } 2.^a \text{ bola blanca}) =$

$= P(1.^a \text{ sea negra}) \cdot P(2.^a \text{ bola blanca}/_{\text{ha salido negra la 1.}^a}) =$

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+(b-1)+c}$$

b) $P(3.^a \text{ se blanca}) = P(1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ blanca, } 3.^a \text{ blanca o } 1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ negra, } 3.^a \text{ blanca o } 1.^a \text{ negra, } 2.^a \text{ negra, } 3.^a \text{ blanca o } 1.^a \text{ negra, } 2.^a \text{ blanca, } 3.^a \text{blanca}) =$

$= P(1^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ blanca, } 3.^a \text{ blanca}) + P(1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ negra, } 3.^a \text{ blanca}) +$

$+ P(1.^a \text{ negra, } 2.^a \text{ negra, } 3.^a \text{ blanca}) + P(1.^a \text{ negra, } 2.^a \text{ blanca, } 3.^a \text{ blanca}) =$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dependiente}}}{=} P(1.^a \text{ blanca}) \cdot P(2.^a \text{ blanca}/_{1.^a \text{ blanca}}) \cdot P(3.^a \text{ blanca}/_{1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ blanca}}) +$

$+ P(1.^a \text{ blanca}) \cdot P(2.^a \text{ negra}/_{1.^a \text{ blanca}}) \cdot P(3.^a \text{ blanca}/_{1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ negra}}) + \cdots =$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+a-1}{c+(a-1)+b} \cdot \frac{c+c-1+a-1}{c+(c-1)+(a-1)+b} + \cdots$$

c) $P(1.^a \text{ blanca, } 2.^a \text{ negra, } 3.^a \text{ blanca, } 4.^a \text{ negra o } 1.^a \text{ negra, } 2.^a \text{ blanca, } 3.^a \text{ negra, } 4.^a \text{ blanca}) = \cdots$

EJERCICIO 6.56. Se ponen en una urna 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se sacan 3 de la urna. Hallar la probabilidad de que:

a) Todos los números sean mayores que 6.

b) El 5 sea el más alto.

SOLUCION:

a) $P(1.^a\text{bola} > 6,\ 2.^a \text{ bola} > 6,\ 3.^a \text{ bola} > 6) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indep.}}}{=} \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{240}$

b) $P(1.^a \text{ bola} < 6,\ 2.^a \text{ bola} < 6,\ 3.^a \text{ bola} < 6) -$

$- P(1.^a \text{ bola} < 5,\ 2.^a \text{ bola} < 5,\ 3.^a \text{ bola} < 5 =$

$= \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} - \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{20}$

EJERCICIO 6.57. Un arquero tiene la probabilidad de 0,6 de dar en el blanco cada vez que dispara. Se sabe que ha lanzado 6 flechas obteniendo 3 blancos. Probabilidad de que el primer lanzamiento haya dado en el blanco.

SOLUCION:

$$A = \{(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)/_{\text{hay 3 blancos y 3 fallos}}\}.$$

sitios para los 3 BLANCOS $\rightarrow PR_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20$

fijada una posición para blancos

$$(B_1, B_2, B_3, F_1, F_2, F_3) \rightarrow P(A) = 20\cdot P(B_1B_2B_3F_1F_2F_3) = 20\cdot(0,6)^3\cdot(0,4)^4$$

$$P(1.^{er} \text{ lanzamiento blanco}/_A) = \frac{P(1.^{er} \text{ lanzamiento blanco} \cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A/_{\text{ha hecho blanco al }1.^o})\cdot P(\text{blanco } 1.^o)}{P(A)} = \frac{PR_5^{2,3}\cdot(0,6)^2\cdot(0,4)^3\cdot(0,6)}{20\cdot(0,6)^3\cdot(0,4)^4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 6.58. En un examen una pregunta admite 5 respuesta y el alumno tiene que señalar con una X la respuesta correcta. Se sabe que la probabilidad de que un determinado alumno sepa la respuesta es 2/3 y la probabilidad de que acierte la respuesta correcta eligiéndola al azar es 1/3. Probabilidad de que el alumno supiera la respuesta de lo que se le preguntaba si se sabe que ha elegido la respuesta correcta.

SOLUCION. Sean los sucesos:

S = «El alumno sabe la respuesta correcta».

$\bar{S}$ = «El alumno no sabe la respueta correcta».

E = «El alumno acierta la respuesta correcta, al elegir al azar entre las 5 posibilidades».

Se pide: P(S/E), y en virtud del Teorema de Bayes es:

$$P(S/E) = \frac{P(E/S) \cdot P(S)}{P(E)} = \frac{P(E/S)P(S)}{P(E/S)P(S) + P(E/\bar{S})P(\bar{S})} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{6}{7}$$

EJERCICIO 6.59. Dos urnas A y B contienen bolas de colores, la primera 6 blancas y 7 azules; la segunda, 5 blancas y 3 azules. Probabilidad de sacar una bola blanca si se escoge una urna al azar y luego se saca una bola de ella. Probabilidad de sacar bola azul si se meten todas las bolas en una urna y se saca luego la bola.

SOLUCION:

a) Sean los sucesos:

BL = «La bola extraída es blanca».

A = «La norma elegida es A».

B = «La urna elegida es B».

$$P(BL) = P(BL/A) \cdot P(A) + P(BL/B) \cdot P(B) = \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{113}{208}$$

b) P(sacar azul) $= \frac{10}{21}$.

EJERCICIO 6.60. Un test detecta la presencia de un cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad de 0,9 en caso de haberlas. Si no las hay detecta la ausencia con probabilidad de 0,8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga bacterias de tipo T es 0,2. Probabilidad de que:

a) Realmente haya presencia de bacterias cuando el test ha dado resultado positivo.

b) Hayan bacterias y además el test dé positivo.

c) Realmente hayan bacterias cuando el test ha dado negativo.

d) O hayan bacterias o dé positivo (pero no las dos cosas a la vez).

SOLUCION: Consideremos los sucesos:

T = «En la muestra hay bacterias T».

$\bar{T}$ = «En la muestra no hay bacterias T».

P = «El test detecta presencia de bacterias T» ≡ «Test positivo».

N = «El test detecta la ausencia de bacterias T» ≡ «Test negativo»,.

$$P(P/T) = 0{,}9 \quad ; \quad P(N/\bar{T}) = 0{,}8 \quad ; \quad P(T) = 0{,}2$$

a) $$P(T/P) = \frac{P(P/T) \cdot P(T)}{P(P)} = \frac{P(P/T) \cdot P(T)}{P(P/T) \cdot P(T) + P(P/\bar{T}) \cdot P(\bar{T})} =$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}2}{0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \frac{9}{17}$$

b) $P(T \cap P) = P(T) \cdot P(P/T) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$

c) $$P(T/N) = \frac{P(N/T) \cdot P(T)}{P(N)} = \frac{P(N/T) \cdot P(T)}{P(N/T) \cdot P(T) + P(N/\bar{T}) \cdot P(\bar{T})} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8} = \frac{1}{33}$$

d) El suceso «o haya bacterias o de positivo, pero no las dos cosas a la vez» es:

$$(T \cap N) \cup (\bar{T} \cap P),$$

y al ser unión de sucesos incompatibles tenemos:

$$P((T \cap N) \cup (\bar{T} \cap P)) = P(T \cap N) + P(\bar{T} \cap P) =$$

$$= P(T) \cdot P(N/T) + P(\bar{T}) \cdot P(P/\bar{T}) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}18$$

EJERCICIO 6.61. La probabilidad de que un alumno apruebe el ejercicio de la conferencia es 0,8, de que apruebe el ejercicio de matemáticas es 0,3 y de que no apruebe ninguno de los dos es 0,1. Probabilidad de que:

a) De aprobar sólo matemáticas.

b) De aprobar sólo la conferencia.

SOLUCION: Sean los sucesos:

C = «Aprueba la conferencia».

M = «Aprueba matemáticas».

S = «Aprueba sólo matemáticas».

a) $M = (M \cap C) \cup (M \cap \overline{C}) = (M \cap C) \cup S \rightarrow P(M) = P(M \cap C) + P(S)$, luego:

$$P(S) = 0{,}3 - P(M \cap C) \quad (1)$$

$$P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}9 = 0{,}2$$

$$P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

luego sustituyendo en (1): $P(S) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$.

b) P(aprobar sólo conferencia) $= 0{,}8 - P(M \cap C) = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6$.

EJERCICIO 6.62. Dos personas se pierden en un bosque y se encuentran frente a 5 caminos. Se sabe que la probabilidad de salir del bosque en una hora, para cada uno de los distintos caminos es, respectivamente: 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 y 0,1. Una de ellas subió del bosque en una hora, calcular la probabilidad de que haya elegido el primer camino. La otra persona no salió en una hora, calcular la probabilidad de que haya elegido el camino cuarto o el quinto.

SOLUCION: Elegido el camino i, la probabilidad de salir del bosque en una hora es:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}6, \text{ si } i = 1 \\ 0{,}3, \text{ si } i = 2 \\ 0{,}2, \text{ si } i = 3 \\ 0{,}1, \text{ si } i = 4 \\ 0{,}1, \text{ si } i = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Suponemos que todos los caminos} \\ \text{tienen igual probabilidad,} \\ \dfrac{1}{5}, \text{ de ser elegidos.} \end{array}$$

Sean P_1 y P_2 las personas, y supongamos que P_1 salió en una hora del bosque.

1) Sean los sucesos

$A \equiv P_1$ salió en una hora del bosque.
$A_i \equiv P_1$ eligió el camino i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

Se pide $P(A_1/A)$. Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A_1/A) = \frac{P(A/A_1) \cdot P(A_1)}{P(A)} = \frac{P(A/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{5} P(A/A_i) \cdot P(A_i)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}(0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1)} = \frac{0{,}6}{1{,}3} = \frac{6}{13} = 0{,}43.$$

2) Sean los sucesos

$B \equiv P_2$ no salió en una hora del bosque.
$B_i \equiv P_2$ eligió el camino i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$
$T \equiv P_2$ eligió el camino 4.º ó 5.º.

Se pone P(T/B), y como B_4 y B_5 son incompatibles, tenemos:

$$P(T/B) = P(B_4/B) + P(B_5/B) = \frac{P(B/B_4) \cdot P(B_4)}{P(B)} + \frac{P(B/B_5) \cdot P(B_5)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(B/B_i) \cdot P(B_i) = \frac{1}{5}(0{,}4 + 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}9) = \frac{3{,}7}{5},$$

luego es:

$$P(T/B) = \frac{0{,}9\frac{1}{5} + 0{,}9\frac{1}{5}}{\frac{3{,}7}{5}} = \frac{1{,}8/5}{3{,}7/5} = \frac{18}{37} = 0{,}48$$

EDITORIAL
Marfil S.A.